ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG – PHẠM HOÀNG QUÂN

Toán 10

TẬP MỘT

BẢN MẪU

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG – PHẠM HOÀNG QUÂN

Toán 10

TẬP MỘT

BẢN MẪU

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

BIỂU TƯỢNG DÙNG TRONG SÁCH

CÂU HỎI KHỞI ĐỘNG
Gợi mở vấn đề, dẫn dắt học sinh vào bài học

HOẠT ĐỘNG
Giúp học sinh phân tích, kiến tạo kiến thức mới với sự hướng dẫn của giáo viên

KHÁM PHÁ KIẾN THỨC
Phát hiện kiến thức mới từ hoạt động

KIẾN THỨC TRỌNG TÂM
Nội dung kiến thức trọng tâm

LUYỆN TẬP – VẬN DỤNG
- Sử dụng những kiến thức vừa học để làm những bài tập cơ bản
- Vận dụng kiến thức đã biết để giải quyết vấn đề, đặc biệt những vấn đề thực tiễn

LƯU Ý
Những kiến thức, kĩ năng cần lưu ý thêm

TÌM HIỂU THÊM
Giúp học sinh tìm hiểu thêm những kiến thức mới góp phần mở rộng nội dung bài học

Các em giữ gìn sách cẩn thận, không viết vào sách để sử dụng được lâu dài.

Các em học sinh lớp 10 yêu quý!

Sau 4 năm ở trung học cơ sở, các em bước vào lớp 10. Ở lớp 10, các em sẽ có thêm nhiều hiểu biết toán học mới về: đại số và đại số tổ hợp; hệ thức lượng trong tam giác, vectơ và phương pháp toạ độ trong mặt phẳng; tiếp tục tìm hiểu sâu hơn thống kê và xác suất; tiến hành những hoạt động thực hành và trải nghiệm, đặc biệt về những hoạt động tài chính đơn giản, sử dụng phần mềm toán học trong thực hành tính toán và vẽ hình hình học. Qua đó giúp các em hiểu biết thêm những công cụ quan trọng của toán học trong việc giải quyết những vấn đề thực tiễn.

Toàn bộ những điều trên được thể hiện qua những tranh ảnh, hình vẽ, bài tập độc đáo và hấp dẫn; qua những câu chuyện lí thú về khoa học tự nhiên, về văn hoá và nghệ thuật, kiến trúc, thể thao và du lịch. Từ đó, các em tiến thêm một bước trên con đường khám phá thế giới bí ẩn và đẹp đẽ của toán học, đặc biệt là "làm giàu" về vốn văn hoá chung và có cơ hội "Mang cuộc sống vào bài học - Đưa bài học vào cuộc sống".

Chịu khó suy nghĩ, trao đổi với thầy cô giáo và bạn bè, nhất định các em sẽ ngày càng tiến bộ và cảm thấy vui sướng khi nhận ra ý nghĩa: Học toán rất có ích cho cuộc sống hằng ngày.

Chúc các em học tập thật tốt, say mê học toán và có thêm nhiều niềm vui.

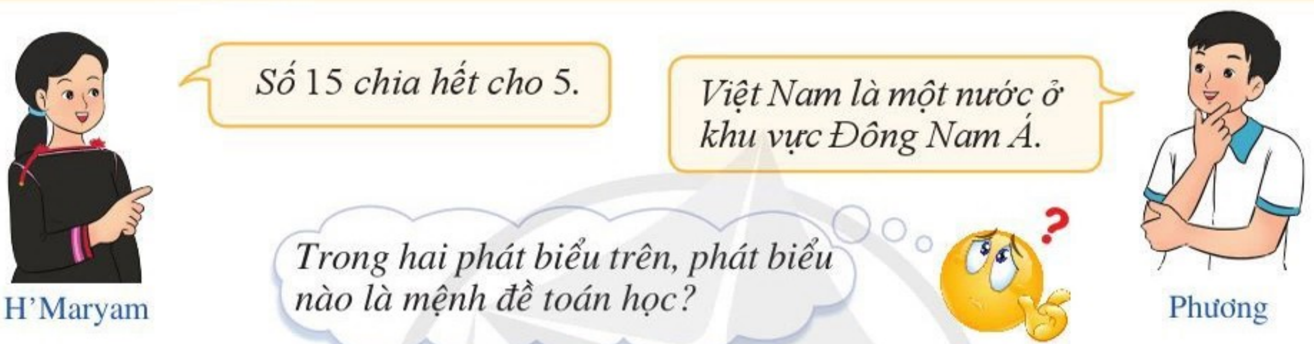
Các tác giả

MỤC LỤC

CHƯƠNG I
MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC. TẬP HỢP

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: mệnh đề toán học, tập hợp và các phép toán trên tập hợp.

§1 MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC



I. MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC

1

a) Phát biểu của bạn H'Maryam có phải là một câu khẳng định về tính chất chia hết trong toán học hay không?

b) Phát biểu của bạn Phương có phải là một câu khẳng định về một sự kiện trong toán học hay không?

Phát biểu của bạn H'Maryam là một mệnh đề khẳng định về một sự kiện trong toán học, gọi là *mệnh đề toán học*.

Như vậy, phát biểu của bạn Phương không phải là mệnh đề toán học.

Chú ý: Khi không sợ nhầm lẫn, ta thường gọi tắt mệnh đề toán học là mệnh đề.

Ví dụ 1 Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề toán học?

a) Hà Nội là Thủ đô của Việt Nam;

b) Số π là một số hữu tỉ;

c) $x = 1$ có phải là nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$ không?

Giải

Câu a) không phải là một mệnh đề toán học.

Câu b) là một mệnh đề toán học.

Câu c) là một câu hỏi nên không phải là một mệnh đề toán học.

1 Nêu hai ví dụ về mệnh đề toán học.

2 Trong hai mệnh đề toán học sau đây, mệnh đề nào là một khẳng định đúng? Mệnh đề nào là một khẳng định sai?

P: "Tổng hai góc đối của một tứ giác nội tiếp bằng 180^{o}";

Q: "$\sqrt{2}$ là số hữu tỉ".

> Mỗi mệnh đề toán học phải hoặc đúng hoặc sai. Một mệnh đề toán học không thể vừa đúng, vừa sai.

Khi mệnh đề toán học là đúng, ta gọi mệnh đề đó là một *mệnh đề đúng*.

Khi mệnh đề toán học là sai, ta gọi mệnh đề đó là một *mệnh đề sai*.

Chẳng hạn, trong hai mệnh đề ở Hoạt động 2, mệnh đề *P* là một mệnh đề đúng, mệnh đề *Q* là một mệnh đề sai.

Ví dụ 2 Tìm mệnh đề đúng trong những mệnh đề sau:

A: "Tam giác có ba cạnh";

B: "1 là số nguyên tố".

> **2** Nêu ví dụ về một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

Giải

Mệnh đề *A* là mệnh đề đúng; mệnh đề *B* là mệnh đề sai vì 1 không là số nguyên tố.

II. MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

3 Xét câu "*n* chia hết cho 3" với *n* là số tự nhiên.

a) Ta có thể khẳng định được tính đúng sai của câu trên hay không?

b) Với $n = 21$ thì câu "21 chia hết cho 3" có phải là mệnh đề toán học hay không? Nếu là mệnh đề toán học thì mệnh đề đó đúng hay sai?

c) Với $n = 10$ thì câu "10 chia hết cho 3" có phải là mệnh đề toán học hay không? Nếu là mệnh đề toán học thì mệnh đề đó đúng hay sai?

- *Ta chưa khẳng định được tính đúng sai của câu "n chia hết cho 3" với n là số tự nhiên.*
- *Với mỗi giá trị cụ thể của biến n, câu này cho ta một mệnh đề toán học mà ta có thể khẳng định được tính đúng sai của mệnh đề đó.*

Câu "*n* chia hết cho 3" là một *mệnh đề chứa biến*.

Ta thường kí hiệu mệnh đề chứa biến *n* là $P(n)$; mệnh đề chứa biến x, y là $P(x, y)$; ...

Ví dụ 3 Trong những câu sau, câu nào là mệnh đề chứa biến?

a) 18 chia hết cho 9;   b) $3n$ chia hết cho 9.

> **3** Nêu ví dụ về mệnh đề chứa biến.

Giải

a) Câu "18 chia hết cho 9" là một mệnh đề nhưng không phải là mệnh đề chứa biến.

b) Câu "3n chia hết cho 9" là một mệnh đề chứa biến, kí hiệu là $P(n)$: "3n chia hết cho 9".

III. PHỦ ĐỊNH CỦA MỘT MỆNH ĐỀ

4 Hai bạn Kiên và Cường đang tranh luận với nhau.

Kiên nói: "Số 23 là số nguyên tố".

Cường nói: "Số 23 không là số nguyên tố".

Em có nhận xét gì về hai câu phát biểu của Kiên và Cường?

Cho mệnh đề P. Mệnh đề "Không phải P" được gọi là *mệnh đề phủ định* của mệnh đề P và kí hiệu là $\overline{P}$.

Mệnh đề $\overline{P}$ *đúng* khi P sai.

Mệnh đề $\overline{P}$ *sai* khi P đúng.

Ví dụ 4 Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó:

A: "16 là bình phương của một số nguyên";

B: "Số 25 không chia hết cho 5".

Giải

Mệnh đề $\overline{A}$: "16 không phải là bình phương của một số nguyên" và $\overline{A}$ sai.

Mệnh đề $\overline{B}$: "Số 25 chia hết cho 5" và $\overline{B}$ đúng.

4 Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

P: "5,15 là một số hữu tỉ";

Q: "2 023 là số chẵn".

Chú ý: Để phủ định một mệnh đề (có dạng phát biểu như trên), ta chỉ cần thêm (hoặc bớt) từ "không" (hoặc "không phải") vào trước vị ngữ của mệnh đề đó.

IV. MỆNH ĐỀ KÉO THEO

5 Xét hai mệnh đề chứa biến:

P: "Số tự nhiên n chia hết cho 6"; Q: "Số tự nhiên n chia hết cho 3".

Xét mệnh đề R: "Nếu số tự nhiên n chia hết cho 6 thì số tự nhiên n chia hết cho 3".

Nhận xét về cách phát biểu mệnh đề R.

Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là *mệnh đề kéo theo* và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng, Q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

Nhận xét: Tuỳ theo nội dung cụ thể, đôi khi người ta còn phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là "P kéo theo Q" hay "P suy ra Q" hay "Vì P nên Q"...

Ví dụ 5 Cho tam giác ABC. Xét hai mệnh đề:

P: "Tam giác ABC có hai góc bằng 60^o"; Q: "Tam giác ABC đều".

Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

Giải

$P \Rightarrow Q$: "Nếu tam giác ABC có hai góc bằng 60^o thì tam giác ABC đều".

Mệnh đề trên là đúng.

Nhận xét: Các định lí toán học là những mệnh đề đúng và thường phát biểu ở dạng mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$.

Khi đó ta nói

P là *giả thiết*, Q là *kết luận* của định lí, hay

P là *điều kiện đủ* để có Q, hoặc Q là *điều kiện cần* để có P.

5 Hãy phát biểu một định lí toán học ở dạng mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$.

V. MỆNH ĐỀ ĐẢO. HAI MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG

6 Cho tam giác ABC. Xét mệnh đề dạng $P \Rightarrow Q$ như sau:

"Nếu tam giác ABC vuông tại A thì tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$".

Phát biểu mệnh đề $Q \Rightarrow P$ và xác định tính đúng sai của hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$.

- Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là *mệnh đề đảo* của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
- Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói P và Q là *hai mệnh đề tương đương*, kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$.

Nhận xét: Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ có thể phát biểu ở những dạng như sau:

- "P tương đương Q";
- "P là điều kiện cần và đủ để có Q";
- "P khi và chỉ khi Q";
- "P nếu và chỉ nếu Q".

Ví dụ 6 Trong Hoạt động 6, hai mệnh đề P và Q có tương đương không? Nếu có, hãy phát biểu mệnh đề tương đương đó.

Giải

Trong Hoạt động 6, ta có:

Mệnh đề P: "Tam giác ABC vuông tại A";

Mệnh đề Q: "Tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$".

6 Cho tam giác ABC. Từ các mệnh đề:

P: "Tam giác ABC đều", Q: "Tam giác ABC cân và có một góc bằng 60^o", hãy phát biểu hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ và xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề đó.

Nếu cả hai mệnh đề trên đều đúng, hãy phát biểu mệnh đề tương đương.

Theo định lí Pythagore, hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng. Do đó, hai mệnh đề P và Q là tương đương và có thể phát biểu như sau: "Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$".

Chú ý: Trong toán học, những câu khẳng định đúng phát biểu ở dạng "$P \Leftrightarrow Q$" cũng được coi là một mệnh đề toán học, gọi là *mệnh đề tương đương*.

VI. KÍ HIỆU ∀ VÀ ∃

7 Cho mệnh đề chứa biến "n chia hết cho 3" với n là số tự nhiên.

a) Phát biểu "Mọi số tự nhiên n đều chia hết cho 3" có phải là mệnh đề không?

b) Phát biểu "Tồn tại số tự nhiên n chia hết cho 3" có phải là mệnh đề không?

- *Phát biểu "Mọi số tự nhiên n đều chia hết cho 3" là một mệnh đề. Có thể viết lại mệnh đề đó như sau: "Với mọi số tự nhiên n, n đều chia hết cho 3".*
- *Phát biểu "Tồn tại số tự nhiên n chia hết cho 3" là một mệnh đề. Có thể viết lại mệnh đề đó như sau: "Tồn tại số tự nhiên n, n chia hết cho 3".*

Để viết gọn phát biểu: "Với mọi số tự nhiên n" ta dùng kí hiệu $\forall n \in \mathbb{N}$, ở đó kí hiệu "$\forall$" đọc là "với mọi". Khi đó, mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, n đều chia hết cho 3" có thể viết lại như sau: "$\forall n \in \mathbb{N}$, n đều chia hết cho 3".

Tương tự, để viết gọn phát biểu: "Tồn tại số tự nhiên n" ta dùng kí hiệu $\exists n \in \mathbb{N}$, ở đó kí hiệu "$\exists$" đọc là "tồn tại" hoặc "có một" (tồn tại một) hoặc "có ít nhất một" (tồn tại ít nhất một). Khi đó, mệnh đề "Tồn tại số tự nhiên n, n chia hết cho 3" có thể viết lại như sau: "$\exists n \in \mathbb{N}$, n chia hết cho 3".

Ví dụ 7

Sử dụng kí hiệu "$\forall$" để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai, giải thích vì sao.

a) P: "Với mọi số thực x, $x^2 + 1 > 0$".

b) Q: "Với mọi số tự nhiên n, $n^2 + n$ chia hết cho 6".

Giải

a) Mệnh đề được viết là P: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$". Để chứng minh mệnh đề P là đúng, ta làm như sau:

Xét một số thực x tuỳ ý, ta phải chứng tỏ rằng $x^2 + 1 > 0$. Thật vậy, ta có: $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Vậy mệnh đề P là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề được viết là Q: "$\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 + n) \,\vdots\, 6$".

Để chứng minh mệnh đề Q là sai, ta cần chỉ ra một giá trị cụ thể của n để nhận được mệnh đề sai.

Thật vậy, chọn $n = 1$, ta thấy $n^2 + n = 2$ không chia hết cho 6. Vậy mệnh đề Q là mệnh đề sai.

Ví dụ 8

Sử dụng kí hiệu "$\exists$" để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai, giải thích vì sao.

a) M: "Tồn tại số thực x sao cho $x^3 = -8$".

b) N: "Tồn tại số nguyên x sao cho $2x + 1 = 0$".

Giải

a) Mệnh đề được viết là M: "$\exists x \in \mathbb{R}, x^3 = -8$".

Để chứng tỏ mệnh đề M là đúng, ta cần chỉ ra một giá trị cụ thể của x để nhận được mệnh đề đúng. Thật vậy, chọn $x = -2$, ta thấy $(-2)^3 = -8$. Vậy mệnh đề M là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề được viết là N: "$\exists x \in \mathbb{Z}, 2x + 1 = 0$".

Để chứng minh mệnh đề N là sai, ta phải chứng tỏ rằng với số nguyên x tuỳ ý thì $2x + 1 \neq 0$. Thật vậy, xét một số nguyên x tuỳ ý, ta có $2x + 1$ không chia hết cho 2 nên $2x + 1 \neq 0$. Vì thế mệnh đề N là mệnh đề sai.

Chú ý: Cách làm ở *Ví dụ 7*, *Ví dụ 8* lần lượt cho chúng ta phương pháp chứng minh một mệnh đề có kí hiệu "$\forall$", có kí hiệu "$\exists$", là đúng hoặc sai.

8 Bạn An nói: "Mọi số thực đều có bình phương là một số không âm".

Bạn Bình phủ định lại câu nói của bạn An: "Có một số thực mà bình phương của nó là một số âm".

a) Sử dụng kí hiệu "$\forall$" để viết mệnh đề của bạn An.

b) Sử dụng kí hiệu "$\exists$" để viết mệnh đề của bạn Bình.

An: "$\forall x \in \mathbb{R}$, x^2 *là một số* $\underbrace{\textit{không âm}}$"

Bình: "$\exists x \in \mathbb{R}$, x^2 *là một số âm*"

Cho mệnh đề "$P(x), x \in X$".

- Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" là mệnh đề "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$".
- Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X, P(x)$" là mệnh đề "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$".

Ví dụ 9 Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$;

b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$.

Giải

a) Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$" là mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, |x| < x$".

b) Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$" là mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$".

7 Phát biểu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

a) Tồn tại số nguyên chia hết cho 3;

b) Mọi số thập phân đều viết được dưới dạng phân số.

BÀI TẬP

1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề toán học?

a) Tích hai số thực trái dấu là một số thực âm.

b) Mọi số tự nhiên đều là số dương.

c) Có sự sống ngoài Trái Đất.

d) Ngày 1 tháng 5 là ngày Quốc tế Lao động.

2. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó:

a) A: "$\dfrac{5}{1{,}2}$ là một phân số"; b) B: "Phương trình $x^2 + 3x + 2 = 0$ có nghiệm";

c) C: "$2^2 + 2^3 = 2^{2+3}$"; d) D: "Số 2 025 chia hết cho 15".

3. Cho n là số tự nhiên. Xét hai mệnh đề chứa biến:

P: "Số tự nhiên n chia hết cho 16";

Q: "Số tự nhiên n chia hết cho 8".

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

4. Cho tam giác ABC. Xét các mệnh đề:

P: "Tam giác ABC cân";

Q: "Tam giác ABC có hai đường cao bằng nhau".

Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng bốn cách.

5. Dùng kí hiệu "$\forall$" hoặc "$\exists$" để viết các mệnh đề sau:

a) Có một số nguyên không chia hết cho chính nó;

b) Mọi số thực cộng với 0 đều bằng chính nó.

6. Phát biểu các mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$; b) $\exists x \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{x} > x$.

7. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2x - 2$; b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1$;

c) $\exists x \in \mathbb{R}, x + \dfrac{1}{x} \geq 2$; d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$.

§2 TẬP HỢP. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

Khái niệm tập hợp thường gặp trong toán học và trong đời sống. Chẳng hạn:

– Tập hợp *A* các học sinh của lớp 10D.

– Tập hợp *B* các học sinh tổ I của lớp 10D.

Làm thế nào để diễn tả quan hệ giữa tập hợp A và tập hợp B?

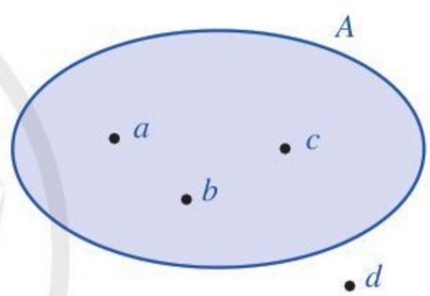
I. TẬP HỢP

1 Ở lớp 6, ta đã làm quen với khái niệm tập hợp, kí hiệu và cách viết tập hợp, phần tử thuộc tập hợp. Hãy nêu cách cho một tập hợp.

2 Người ta còn minh hoạ tập hợp bằng một vòng kín, mỗi phần tử của tập hợp được biểu diễn bởi một chấm bên trong vòng kín, còn phần tử không thuộc tập hợp đó được biểu diễn bởi một chấm bên ngoài vòng kín (*Hình 1*). Cách minh hoạ tập hợp như vậy được gọi là biểu đồ Ven.

a) Viết tập hợp *A* trong *Hình 1* bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp đó.

b) Nêu phần tử không thuộc tập hợp *A*.



Hình 1

Ví dụ 1 Cho tập hợp *B* gồm các số tự nhiên có một chữ số và chia hết cho 3.

a) Viết tập hợp *B* theo hai cách: liệt kê các phần tử của tập hợp; chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

b) Minh hoạ tập hợp *B* bằng biểu đồ Ven.

Giải

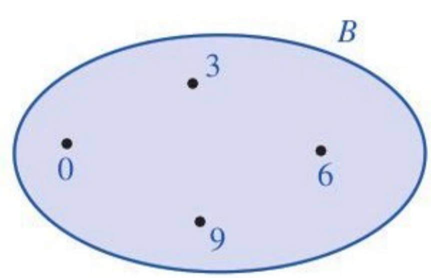
a) Tập hợp *B* được viết theo cách liệt kê các phần tử là:

$$B = \{0; 3; 6; 9\}.$$

Tập hợp *B* được viết theo cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử là:

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9 \text{ và } x \,\vdots\, 3\}.$$

b) Tập hợp *B* được minh hoạ bằng biểu đồ Ven ở *Hình 2*.



Hình 2

3 Nêu số phần tử của mỗi tập hợp sau:

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$, $D = \{a\}$, $E = \{b; c; d\}$, $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; ...\}$.

Nhận xét

- Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập hợp rỗng (tập rỗng), kí hiệu là $\varnothing$.
- Một tập hợp có thể không có phần tử nào, cũng có thể có một phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử.

Chú ý: Khi tập hợp C là tập hợp rỗng, ta viết $C = \varnothing$ và không được viết là $C = \{\varnothing\}$.

1 Nêu số phần tử của mỗi tập hợp sau:

$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$,

$\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; ...\}$.

II. TẬP CON VÀ TẬP HỢP BẰNG NHAU

1. Tập con

4 Cho hai tập hợp:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$.

a) Viết tập hợp A, B bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp.

b) Mỗi phần tử của tập hợp A có thuộc tập hợp B không?

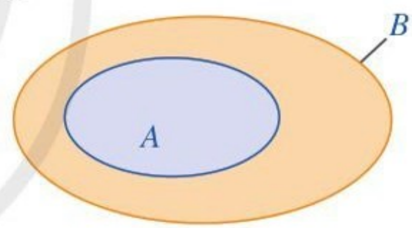
Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là một *tập con* của B và viết là $A \subset B$. Ta còn đọc là A chứa trong B.

Quy ước: Tập hợp rỗng $\varnothing$ được coi là tập con của mọi tập hợp.

Chú ý: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Khi $A \subset B$, ta cũng viết $B \supset A$ (đọc là B chứa A) (*Hình 3*).

Nếu A không phải là tập con của B, ta viết $A \not\subset B$.



Hình 3

Ví dụ 2 Cho hai tập hợp:

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$.

Chứng tỏ rằng $E \subset F$.

Giải

Với mọi số thực x, ta có: $x \leq 1$ thì $x < 2$ nên $x \in E$ thì $x \in F$.

Do đó $E \subset F$.

2 Cho hai tập hợp:

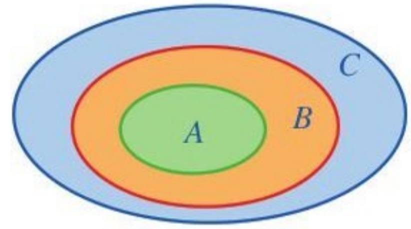
$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ chia hết cho $3\}$,

$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ chia hết cho $9\}$.

Chứng tỏ rằng $B \subset A$.

Ta có các tính chất sau:

- $A \subset A$ với mọi tập hợp A;
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$ (*Hình 4*).



Hình 4

2. Tập hợp bằng nhau

5 Cho hai tập hợp:

$A = \{0; 6; 12; 18\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 18$ và n là bội của $6\}$.

Các mệnh đề sau có đúng không?

a) $A \subset B$; b) $B \subset A$.

Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ thì ta nói hai tập hợp A và B *bằng nhau*, viết là $A = B$.

3 Cho hai tập hợp $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ chia hết cho 3 và $4\}$ và $G = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ chia hết cho $12\}$.

Chứng tỏ rằng $E = G$.

Ví dụ 3 Cho tập hợp C gồm các tam giác có ba cạnh bằng nhau và tập hợp D gồm các tam giác có ba góc bằng nhau. Hai tập hợp C và D có bằng nhau hay không?

Giải

Do một tam giác có ba cạnh bằng nhau khi và chỉ khi tam giác đó có ba góc bằng nhau nên hai tập hợp C và D là bằng nhau.

III. GIAO CỦA HAI TẬP HỢP

6 Lớp trưởng lập hai danh sách các bạn đăng kí tham gia câu lạc bộ thể thao như sau (biết trong lớp không có hai bạn nào cùng tên):

– Bóng đá gồm: An, Bình, Chung, Dũng, Minh, Nam, Phương;

– Bóng rổ gồm: An, Chung, Khang, Phong, Quang, Tuấn.

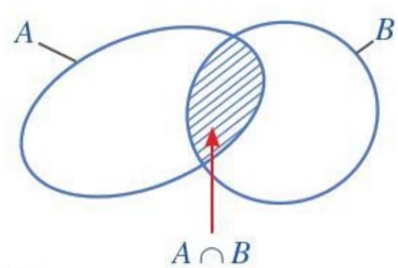
Hãy liệt kê danh sách các bạn đăng kí tham gia cả hai câu lạc bộ.

Tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc tập hợp A vừa thuộc tập hợp B được gọi là *giao* của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cap B$.

$x \in A \cap B$ khi và chỉ khi $x \in A$ và $x \in B$.

Vậy $A \cap B = \{x \mid x \in A$ và $x \in B\}$.

Tập hợp $A \cap B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong *Hình 5*.



Hình 5

Ví dụ 4 Tìm giao của hai tập hợp trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là ước của $16\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là ước của $20\}$.

b) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là bội của $4\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là bội của $5\}$.

Giải

a) $A = \{1; 2; 4; 8; 16\}$, $B = \{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$. Vậy $A \cap B = \{1; 2; 4\}$.

Chú ý: A là tập hợp các ước tự nhiên của 16, B là tập hợp các ước tự nhiên của 20 nên $A \cap B$ là tập hợp các ước chung tự nhiên của 16 và 20.

b) $C \cap D = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là bội của 4 và x là bội của $5\}$

$= \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là bội chung của 4 và $5\}$.

IV. HỢP CỦA HAI TẬP HỢP

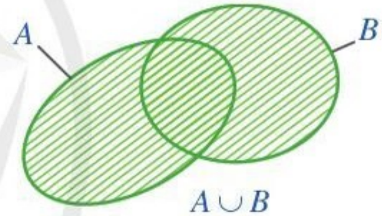
7 Hai trường dự định tổ chức giải thi đấu thể thao cho học sinh lớp 10. Trường thứ nhất đề xuất ba môn thi đấu là: Bóng bàn, Bóng đá, Bóng rổ. Trường thứ hai đề xuất ba môn thi đấu là: Bóng đá, Bóng rổ, Cầu lông. Lập danh sách những môn thi đấu mà cả hai trường đã đề xuất.

Tập hợp gồm các phần tử thuộc tập hợp A hoặc thuộc tập hợp B được gọi là *hợp* của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cup B$.

$x \in A \cup B$ khi và chỉ khi $x \in A$ hoặc $x \in B$.

Vậy $A \cup B = \{x \mid x \in A$ hoặc $x \in B\}$.

Tập hợp $A \cup B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong *Hình 6*.



Hình 6

Ví dụ 5 Cho tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ và tập hợp I các số vô tỉ. Tìm $\mathbb{Q} \cap I$, $\mathbb{Q} \cup I$.

Giải

Ta có: $\mathbb{Q} \cap I = \varnothing$, $\mathbb{Q} \cup I = \mathbb{R}$.

4 Cho hai tập hợp:
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\}$.
Tìm $A \cap B$, $A \cup B$.

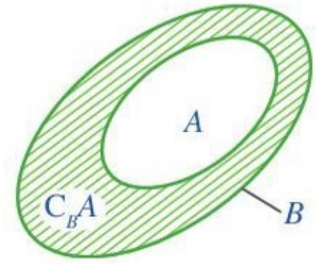
V. PHẦN BÙ. HIỆU CỦA HAI TẬP HỢP

8 Gọi $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực, I là tập hợp các số vô tỉ. Khi đó $I \subset \mathbb{R}$. Tìm tập hợp những số thực không phải là số vô tỉ.

Tập hợp những số thực không phải là số vô tỉ chính là tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ.

Ta nói tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ là phần bù của tập hợp I các số vô tỉ trong tập hợp $\mathbb{R}$.

> Cho tập hợp A là tập con của tập hợp B. Tập hợp những phần tử thuộc B mà không thuộc A được gọi là *phần bù* của A trong B, kí hiệu C_BA.



Hình 7

Tập hợp C_BA được mô tả bằng phần gạch chéo trong *Hình 7*.

Ví dụ 6 Tất cả học sinh của lớp 10A đều đăng kí đi tham quan ở một trong hai địa điểm: Hoàng thành Thăng Long và Văn Miếu – Quốc Tử Giám. Mỗi học sinh chỉ đăng kí một địa điểm. Gọi A là tập hợp các học sinh đăng kí tham quan Hoàng thành Thăng Long, B là tập hợp các học sinh đăng kí tham quan Văn Miếu – Quốc Tử Giám, T là tập hợp các học sinh lớp 10A. Tìm phần bù của tập hợp A trong tập hợp T.

Giải. Phần bù của tập hợp A trong tập hợp T bao gồm những học sinh trong lớp không đăng kí tham quan Hoàng thành Thăng Long nên $C_TA = B$.

9 Cho hai tập hợp: $A = \{2; 3; 5; 7; 14\}$, $B = \{3; 5; 7; 9; 11\}$.

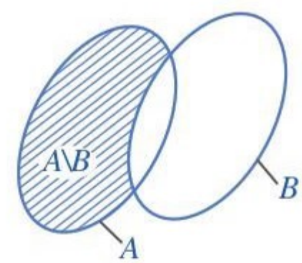
Liệt kê các phần tử thuộc tập hợp A nhưng không thuộc tập hợp B.

> Tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B được gọi là *hiệu* của A và B, kí hiệu $A \setminus B$.

> $x \in A \setminus B$ khi và chỉ khi $x \in A$ và $x \notin B$.

Vậy $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$.

Tập hợp $A \setminus B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong *Hình 8*.



Hình 8

Chú ý: Nếu $B \subset A$ thì $A \setminus B = C_AB$.

Ví dụ 7 Cho hai tập hợp: $A = \{3; 6; 9; 12\}$,

$$B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}.$$

Tìm $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Giải

- Tập hợp $A \setminus B$ gồm những phần tử thuộc A mà không thuộc B. Vậy $A \setminus B = \{3; 9\}$.
- Tập hợp $B \setminus A$ gồm những phần tử thuộc B mà không thuộc A. Vậy $B \setminus A = \{2; 4; 8; 10\}$.

> **5** Cho hai tập hợp:
> $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \le x \le 3\}$,
> $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 = 0\}$.
> Tìm $A \setminus B$ và $B \setminus A$.

Ví dụ 8 Cho hai tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x - 11 \le 0\}$,

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x^2 - 14x + 11 = 0\}.$$

Tìm $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Giải

Ta có: $A = \{0; 1; 2; 3\}$, $B = \{1\}$.

Vậy $A \cap B = \{1\}$, $A \cup B = \{0; 1; 2; 3\}$, $A \setminus B = \{0; 2; 3\}$, $B \setminus A = \varnothing$.

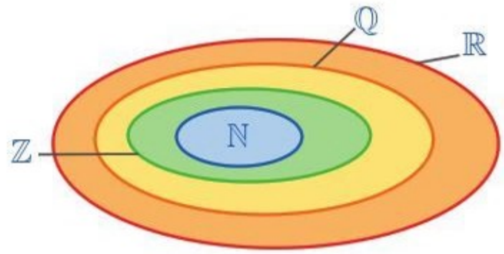
VI. CÁC TẬP HỢP SỐ

1. Các tập hợp số đã học

Ta đã biết $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp số tự nhiên, tập hợp số nguyên, tập hợp số hữu tỉ, tập hợp số thực.

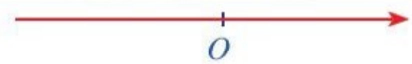
Ta có quan hệ sau:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (*Hình 9*).



Hình 9

2. Một số tập con thường dùng của tập hợp số thực

Tập hợp	Tên gọi và kí hiệu	Biểu diễn trên trục số (Phần được tô màu đỏ)
$\mathbb{R}$	Tập hợp số thực $(-\infty ; +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	Đoạn $[a ; b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	Khoảng $(a ; b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	Khoảng $(a ; +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	Khoảng $(-\infty ; b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	Nửa khoảng $[a ; b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	Nửa khoảng $(a ; b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$	Nửa khoảng $[a ; +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$	Nửa khoảng $(-\infty ; b]$	

Kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực, kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực; a và b được gọi là đầu mút của các đoạn, khoảng, nửa khoảng.

Ta có thể biểu diễn tập hợp trên trục số bằng cách gạch bỏ phần không thuộc tập đó, chẳng hạn đoạn $[a ; b]$ có thể biểu diễn như sau:

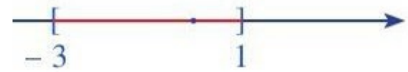
Ví dụ 9 Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 1\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 > 0\}$.

a) Hãy đọc tên, kí hiệu và biểu diễn mỗi tập hợp đã cho trên trục số.

b) Hãy xác định các tập hợp: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $C_{\mathbb{R}}B$.

Giải

a) Tập hợp A là đoạn $[-3 ; 1]$ và được biểu diễn là:



Tập hợp B là khoảng $(-1 ; +\infty)$ và được biểu diễn là:

b) Ta có:

$A \cap B = (-1 ; 1]$, $A \cup B = [-3 ; +\infty)$, $A \setminus B = [-3 ; -1]$, $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty ; -1]$.

BÀI TẬP

1. Cho tập hợp $X = \{a; b; c\}$. Viết tất cả các tập con của tập hợp X.

2. Sắp xếp các tập hợp sau theo quan hệ "$\subset$":

$[2 ; 5]$, $(2 ; 5)$, $[2 ; 5)$, $(1 ; 5]$.

3. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

a) $[-3 ; 7] \cap (2 ; 5)$; b) $(-\infty ; 0] \cup (-1 ; 2)$;

c) $\mathbb{R} \setminus (-\infty ; 3)$; d) $(-3 ; 2) \setminus [1 ; 3)$.

4. Gọi A là tập nghiệm của phương trình $x^2 + x - 2 = 0$,

B là tập nghiệm của phương trình $2x^2 + x - 6 = 0$.

Tìm $C = A \cap B$.

5. Tìm $D = E \cap G$ biết E và G lần lượt là tập nghiệm của hai bất phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a) $2x + 3 \geq 0$ và $-x + 5 \geq 0$;

b) $x + 2 > 0$ và $2x - 9 < 0$.

6. Gọi A là tập nghiệm của đa thức $P(x)$. Viết tập hợp các số thực x sao cho biểu thức $\dfrac{1}{P(x)}$ xác định.

7. Lớp 10B có 28 học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và 19 học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc. Biết rằng có 10 học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên.

a) Có bao nhiêu học sinh ở lớp 10B tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc?

b) Có bao nhiêu học sinh ở lớp 10B tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên?

c) Biết lớp 10B có 40 học sinh. Có bao nhiêu học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao? Có bao nhiêu học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ?

8. Một nhóm có 12 học sinh chuẩn bị cho hội diễn văn nghệ. Trong danh sách đăng kí tham gia tiết mục múa và tiết mục hát của nhóm đó, có 5 học sinh tham gia tiết mục múa, 3 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia tiết mục hát? Biết có 4 học sinh của nhóm không tham gia tiết mục nào.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

1. Phát biểu nào sau đây **không** là một mệnh đề toán học?

a) Tích của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

b) Nếu $\widehat{AMB} = 90^{\circ}$ thì M nằm trên đường tròn đường kính AB.

c) Ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Cộng hoà xã hội chủ nghĩa Việt Nam.

d) Mọi số nguyên tố đều là số lẻ.

2. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

A: "Đồ thị hàm số $y = x$ là một đường thẳng".

B: "Đồ thị hàm số $y = x^2$ đi qua điểm $A(3 ; 6)$".

3. Cho tứ giác $ABCD$. Lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của mệnh đề đó với:

a) P: "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật", Q: "Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành";

b) P: "Tứ giác $ABCD$ là hình thoi", Q: "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông".

4. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

A: "$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$"; B: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x \geq 1$";

C: "$\exists x \in \mathbb{Z}, 2x^2 + 3x - 2 = 0$"; D: "$\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 < x$".

5. Dùng kí hiệu để viết mỗi tập hợp sau và biểu diễn mỗi tập hợp đó trên trục số:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 0\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$; d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$.

6. Giải Bóng đá vô địch thế giới World Cup 2018 được tổ chức ở Liên bang Nga gồm 32 đội. Sau vòng thi đấu bảng, Ban tổ chức chọn ra 16 đội chia làm 8 cặp đấu loại trực tiếp. Sau vòng đấu loại trực tiếp đó, Ban tổ chức tiếp tục chọn ra 8 đội chia làm 4 cặp đấu loại trực tiếp ở vòng tứ kết. Gọi A là tập hợp 32 đội tham gia World Cup 2018, B là tập hợp 16 đội sau vòng thi đấu bảng, C là tập hợp 8 đội thi đấu vòng tứ kết.

a) Sắp xếp các tập hợp A, B, C theo quan hệ "$\subset$".

b) So sánh hai tập hợp $A \cap C$ và $B \cap C$.

c) Tập hợp $A \setminus B$ gồm những đội bóng bị loại sau vòng đấu nào?

7. Cho hai tập hợp: $A = [0 ; 3]$, $B = (2 ; +\infty)$. Xác định $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathbb{R} \setminus B$.

8. Gọi M là tập nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$,

N là tập nghiệm của phương trình $(x + 1)(2x - 3) = 0$.

Tìm $P = M \cap N$.

CHƯƠNG II
BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: bất phương trình bậc nhất hai ẩn; hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và ứng dụng của chúng vào bài toán thực tiễn.

§1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Nhân dịp Tết Trung thu, một doanh nghiệp dự định sản xuất hai loại bánh: bánh nướng và bánh dẻo. Lượng đường cần cho mỗi chiếc bánh nướng, bánh dẻo lần lượt là 60 g, 50 g. Doanh nghiệp đã nhập về 500 kg đường.

Số bánh nướng và số bánh dẻo doanh nghiệp dự định sản xuất cần thoả mãn điều kiện ràng buộc gì để lượng đường sản xuất bánh không vượt quá lượng đường đã nhập về?

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1 Trong bài toán ở phần mở đầu, ta gọi x, y lần lượt là số bánh nướng và số bánh dẻo doanh nghiệp dự định sản xuất (x, y là số tự nhiên). Nêu điều kiện ràng buộc đối với x và y để lượng đường sản xuất bánh không vượt quá lượng đường đã nhập về.

Điều kiện ràng buộc đối với x và y là: $0,06x + 0,05y \leq 500$.

Điều kiện trên là một bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y.

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$$ax + by < c;\ ax + by > c;\ ax + by \leq c;\ ax + by \geq c,$$

trong đó a, b, c là những số thực cho trước với a, b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn.

Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by < c$ (*).

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 < c$ được gọi là một *nghiệm* của bất phương trình (*).

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm của bất phương trình (*) được gọi là *miền nghiệm* của bất phương trình đó.

Nghiệm và miền nghiệm của các bất phương trình dạng $ax + by > c$, $ax + by \leq c$ và $ax + by \geq c$ được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 1 Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $3x + 2y \geq -5$?

a) $(2 ; -1)$; b) $(-2 ; 0)$; c) $(-1 ; -1)$.

Giải

a) Thay $x = 2$, $y = -1$, ta có: $3 . 2 + 2 . (-1) \geq -5$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(2 ; -1)$ là nghiệm của bất phương trình.

b) Thay $x = -2$, $y = 0$, ta có: $3 . (-2) + 2 . 0 \geq -5$ là mệnh đề sai.

Vậy $(-2 ; 0)$ không là nghiệm của bất phương trình.

c) Thay $x = -1$, $y = -1$, ta có: $3 . (-1) + 2 . (-1) \geq -5$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(-1 ; -1)$ là nghiệm của bất phương trình.

1 Tìm bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các bất phương trình sau và chỉ ra một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn đó:

a) $5x + 3y < 20$;

b) $3x - \frac{5}{y} > 2$.

II. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Mô tả miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xác định các điểm $M(x ; y)$ mà:

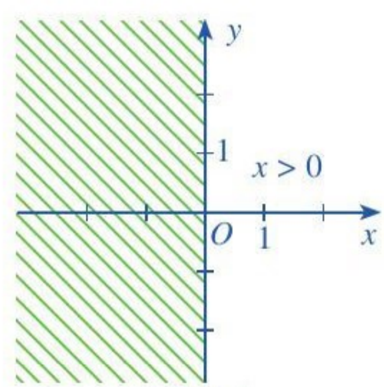
a) $x > 0$ (1); b) $y < 1$ (2).

Để xác định các điểm $M(x ; y)$ trong mặt phẳng toạ độ thoả mãn điều kiện đã cho, ta làm như sau:

a) Đường thẳng $x = 0$ chính là trục tung.

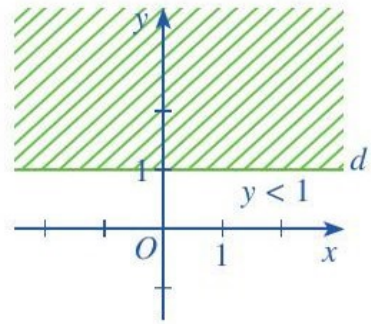
Đường thẳng $x = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa: nửa mặt phẳng bên trái và nửa mặt phẳng bên phải trục tung.

Một điểm có hoành độ dương thì nằm ở nửa mặt phẳng bên phải trục tung và ngược lại. Vì thế, miền nghiệm của bất phương trình (1) là nửa mặt phẳng bên phải trục tung, được mô tả bằng nửa mặt phẳng không bị gạch ở *Hình 1* (không kể trục tung).



Hình 1

b) Vẽ đường thẳng $y = 1$.



Hình 2

Đường thẳng d: $y = 1$ chia mặt phẳng thành hai nửa: nửa mặt phẳng bên trên và nửa mặt phẳng bên dưới đường thẳng d (không kể đường thẳng d).

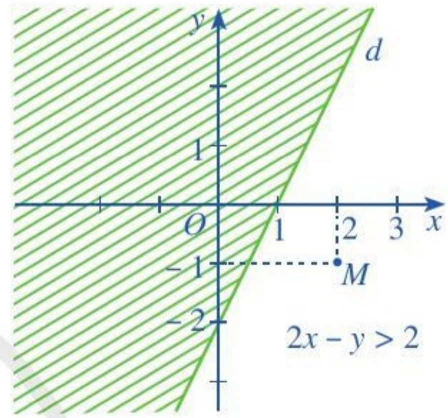
Một điểm có tung độ nhỏ hơn 1 thì nằm ở nửa mặt phẳng bên dưới đường thẳng d và ngược lại. Vì thế, miền nghiệm của bất phương trình (2) là nửa mặt phẳng bên dưới đường thẳng d, được mô tả bằng nửa mặt phẳng không bị gạch ở *Hình 2* (không kể đường thẳng d).

3 Cho bất phương trình $2x - y > 2$ (3).

a) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ đường thẳng d: $2x - y = 2 \Leftrightarrow y = 2x - 2$.

b) Xét điểm $M(2 ; -1)$. Chứng tỏ $(2 ; -1)$ là nghiệm của bất phương trình (3).

c) Đường thẳng d chia mặt phẳng toạ độ thành hai nửa mặt phẳng. Gạch đi nửa mặt phẳng không chứa điểm $M(2 ; -1)$.



Hình 3

Miền nghiệm của bất phương trình (3) là nửa mặt phẳng không bị gạch trong Hình 3.

Người ta chứng minh được định lí sau:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, phương trình $ax + by = c$ (với a và b không đồng thời bằng 0) xác định một đường thẳng d như sau:

- d có phương trình là $x = \dfrac{c}{a}$ nếu $b = 0$;
- d có phương trình là $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$ nếu $b \neq 0$.

Ngoài ra, người ta cũng chứng minh được định lí sau:

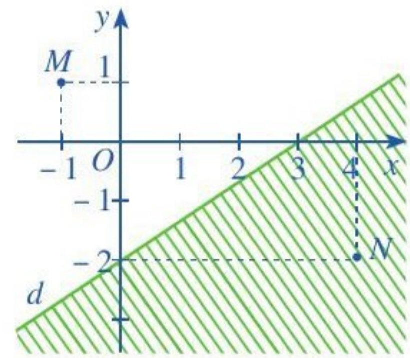
Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đường thẳng d: $ax + by = c$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng (không kể d) là *miền nghiệm* của bất phương trình $ax + by < c$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể d) là *miền nghiệm* của bất phương trình $ax + by > c$.

Chú ý: Đối với bất phương trình dạng $ax + by \leq c$ hoặc $ax + by \geq c$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả đường thẳng d.

Ví dụ 2 Nửa mặt phẳng không bị gạch trong *Hình 4* (không kể đường thẳng d) biểu diễn miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Hỏi toạ độ hai điểm $M(-1 ; 1)$, $N(4 ; -2)$ có là nghiệm của bất phương trình đó không?

Giải

- Điểm $M(-1 ; 1)$ thuộc nửa mặt phẳng không bị gạch nên $(-1 ; 1)$ là nghiệm của bất phương trình đó.
- Điểm $N(4 ; -2)$ thuộc nửa mặt phẳng bị gạch nên $(4 ; -2)$ không là nghiệm của bất phương trình đó.



Hình 4

2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Quy tắc thực hành biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn như sau:

Các bước biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy:

Bước 1. Vẽ đường thẳng d: $ax + by = c$. Đường thẳng d chia mặt phẳng toạ độ thành hai nửa mặt phẳng.

Bước 2. Lấy một điểm $M(x_0 ; y_0)$ không nằm trên d (ta thường lấy gốc toạ độ O nếu $c \neq 0$). Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh với c.

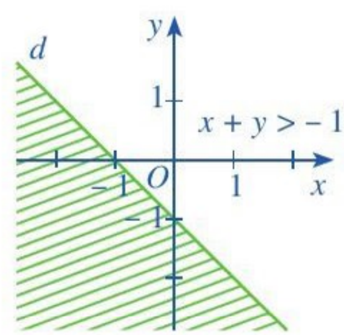
Bước 3. Kết luận

- Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.
- Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.

Ví dụ 3 Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau: $x + y > -1$; $x + y \geq -1$.

Giải

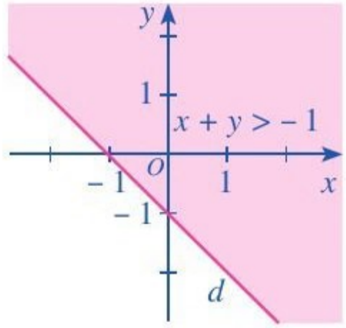
- Vẽ đường thẳng d: $x + y = -1$.
- Lấy điểm $O(0 ; 0)$. Ta có: $0 + 0 = 0 > -1$.
- Vậy miền nghiệm của bất phương trình $x + y > -1$ là nửa mặt phẳng không bị gạch ở *Hình 5* chứa điểm $O(0; 0)$ không kể đường thẳng d; miền nghiệm của bất phương trình $x + y \geq -1$ là nửa mặt phẳng không bị gạch ở *Hình 5* chứa điểm $O(0; 0)$ kể cả đường thẳng d.



Hình 5

Chú ý: Thông thường khi sử dụng phần mềm toán học để biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn, miền nghiệm của bất phương trình đó được tô màu.

Chẳng hạn, miền nghiệm của bất phương trình $x + y > -1$ được tô màu như *Hình 6*.



Hình 6

2 Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

a) $x - 2y < 4$;

b) $x + 3y \le 6$.

BÀI TẬP

1. Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $2x - 3y < 3$?

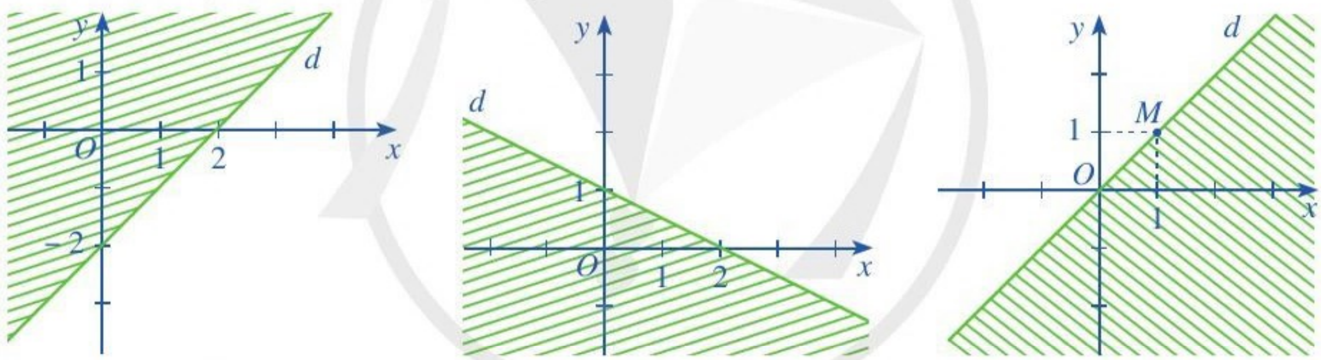
a) $(0 ; -1)$; b) $(2 ; 1)$; c) $(3 ; 1)$.

2. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

a) $x + 2y < 3$; b) $3x - 4y \ge -3$;

c) $y \ge -2x + 4$; d) $y < 1 - 2x$.

3. Phần nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể đường thẳng *d*) ở mỗi *Hình 7a*, *7b*, *7c* là miền nghiệm của bất phương trình nào?



a) *b)* *c)*

Hình 7

4. Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng $60\ m^2$. Diện tích để kê một chiếc ghế là $0,5\ m^2$, một chiếc bàn là $1,2\ m^2$. Gọi *x* là số chiếc ghế, *y* là số chiếc bàn được kê.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn *x*, *y* cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là $12\ m^2$.

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

5. Trong 1 lạng (100 g) thịt bò chứa khoảng 26 g protein, 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20 g protein. Trung bình trong một ngày, một người phụ nữ cần tối thiểu 46 g protein. (*Nguồn: https://vinmec.com* và *https://thanhnien.vn*) Gọi *x*, *y* lần lượt là số lạng thịt bò và số lạng cá rô phi mà một người phụ nữ nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn *x*, *y* để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người phụ nữ trong một ngày và chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

§2 HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Quảng cáo sản phẩm trên truyền hình là một hoạt động quan trọng trong kinh doanh của các doanh nghiệp.

Sảnh "Trống đồng" ở trụ sở của VTV tại Hà Nội
(Nguồn: Trịnh Hoàng Minh Quang)

Theo Thông báo số 10/2019, giá quảng cáo trên VTV1 là 30 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khoảng 20h30; là 6 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 – 17h00.

Một công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng để quảng cáo trên VTV1 với yêu cầu quảng cáo về số lần phát như sau: ít nhất 10 lần quảng cáo vào khoảng 20h30 và không quá 50 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 – 17h00. Gọi x, y lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 và vào khung giờ 16h00 – 17h00.

Trong toán học, các điều kiện ràng buộc đối với x và y để đáp ứng nhu cầu trên của công ty được thể hiện như thế nào?

I. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1 Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x - y < 3 & (1) \\ x + 2y > -2 & (2) \end{cases}$$

a) Mỗi bất phương trình (1) và (2) có là bất phương trình bậc nhất hai ẩn không?

b) Chỉ ra một nghiệm chung của hai bất phương trình (1) và (2) trong hệ trên.

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y. Mỗi nghiệm chung của các bất phương trình trong hệ được gọi là một *nghiệm* của hệ bất phương trình đó.

Ví dụ 1 Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x - 4y \le 6 & (1) \\ x + y > 2 & (2) \end{cases}$$

Cặp số $(x ; y)$ nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình trên?

$$(3 ; 1), (1 ; -2), (5 ; -3).$$

1 Chỉ ra một nghiệm của hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + y > 0 \\ x - 3y < 6 \\ x - y \ge -4. \end{cases}$$

Giải

- Thay $x = 3$, $y = 1$ vào hai bất phương trình của hệ, ta có:

$$2 . 3 - 4 . 1 \le 6 \text{ là mệnh đề đúng; } 3 + 1 > 2 \text{ là mệnh đề đúng.}$$

Vậy (3 ; 1) là nghiệm chung của (1) và (2) nên (3 ; 1) là nghiệm của hệ bất phương trình.

- Thay $x = 1$, $y = -2$ vào bất phương trình (2) của hệ, ta có:

$1 + (-2) > 2$ là mệnh đề sai.

Vậy (1 ; – 2) không là nghiệm của (2) nên (1 ; – 2) không là nghiệm của hệ bất phương trình.

- Thay $x = 5$, $y = -3$ vào bất phương trình (2) của hệ, ta có:

$5 + (-3) > 2$ là mệnh đề sai.

Vậy (5 ; – 3) không là nghiệm của (2) nên (5 ; – 3) không là nghiệm của hệ bất phương trình.

II. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng toạ độ.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

2 Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x - 2y \ge -2 \\ 7x - 4y \le 16 \\ 2x + y \ge -4. \end{cases}$$

a) Trong cùng mặt phẳng toạ độ Oxy, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bất phương trình bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.

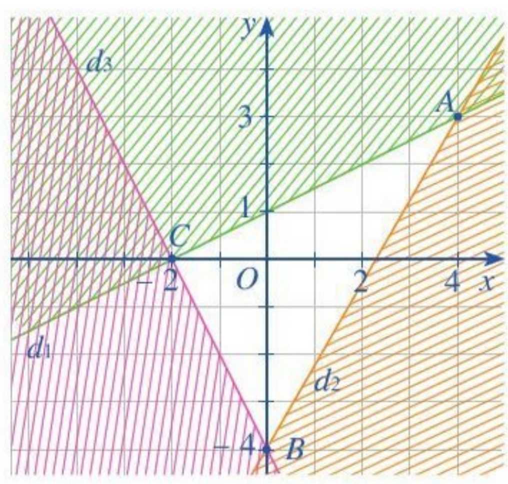
b) Tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho, ta làm như sau (*Hình 8*):

Bước 1. Trong cùng mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ ba đường thẳng:

d_1: $x - 2y = -2$; d_2: $7x - 4y = 16$; d_3: $2x + y = -4$.

Do toạ độ điểm $O(0 ; 0)$ thoả mãn các bất phương trình trong hệ nên miền nghiệm của từng bất phương trình trong hệ lần lượt là những nửa mặt phẳng không bị gạch chứa điểm $O(0 ; 0)$ (kể cả đường thẳng tương ứng).



Hình 8

Bước 2. Phần không bị gạch (chứa điểm $O(0\ ;\ 0)$) là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

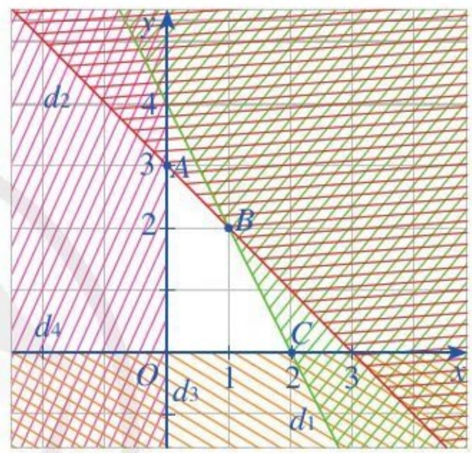
Cụ thể, miền nghiệm của hệ đã cho là tam giác ABC kể cả miền trong (còn gọi là miền tam giác ABC) với $A(4\ ;\ 3)$, $B(0\ ;\ -4)$, $C(-2\ ;\ 0)$.

Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta làm như sau:

- Trong cùng mặt phẳng toạ độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.
- Phần không bị gạch là miền nghiệm cần tìm.

Ví dụ 2 Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y \le 4 \\ x + y \le 3 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$



Hình 9

Giải. (*Hình 9*)

Vẽ các đường thẳng:

d_1: $2x + y = 4$; d_2: $x + y = 3$; d_3: $x = 0$ là trục tung; d_4: $y = 0$ là trục hoành.

Gạch đi các phần không thuộc miền nghiệm của mỗi bất phương trình.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $OABC$ kể cả miền trong (còn gọi là miền tứ giác $OABC$) với $O(0\ ;\ 0)$, $A(0\ ;\ 3)$, $B(1\ ;\ 2)$, $C(2\ ;\ 0)$.

2 Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x - y > -3 \\ -2x + 3y < 6 \\ 2x + y > -4. \end{cases}$$

III. ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Bài toán 1. Trong bài toán ở phần mở đầu, tìm x và y sao cho tổng số lần xuất hiện quảng cáo của công ty là nhiều nhất.

Giải

Gọi x, y lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 và vào khung giờ 16h00 – 17h00. Theo giả thiết, ta có: $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, $x \ge 10$, $0 \le y \le 50$.

Tổng số lần phát quảng cáo là $T = x + y$.

Số tiền công ty cần chi là $30x + 6y$ (triệu đồng).

Do công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng nên $30x + 6y \le 900$ hay $5x + y \le 150$.

Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} 5x + y \le 150 \\ x \ge 10 \\ 0 \le y \le 50 \end{cases}$ (I)

Bài toán đưa về tìm các số tự nhiên x, y là nghiệm của hệ bất phương trình (I) sao cho $T = x + y$ có giá trị lớn nhất.

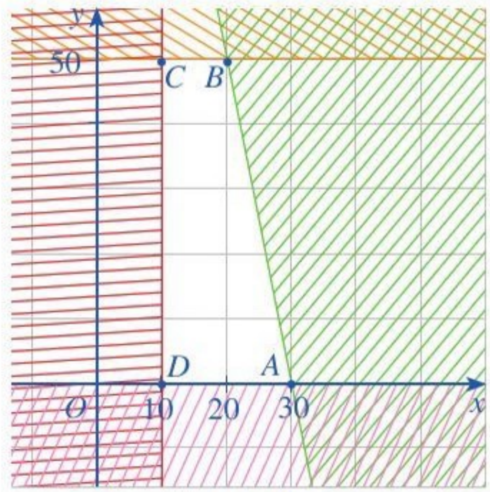
Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (I).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (I) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(30 ; 0)$, $B(20 ; 50)$, $C(10 ; 50)$, $D(10 ; 0)$ (*Hình 10*).

Người ta chứng minh được: Biểu thức $T = x + y$ đạt giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = x + y$ tại cặp số $(x ; y)$ là toạ độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được T đạt giá trị lớn nhất khi $x = 20$, $y = 50$ ứng với toạ độ đỉnh B.

Vậy để phát được số lần quảng cáo nhiều nhất thì số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 là 20 lần và vào khung giờ 16h00 – 17h00 là 50 lần.



Hình 10

Bài toán 2. Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất? Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

Giải

Gọi x, y lần lượt là số tấn nguyên liệu loại I, loại II cần sử dụng.

Khi đó, ta chiết xuất được $20x + 10y$ (kg) chất A và $0,6x + 1,5y$ (kg) chất B.

Theo giả thiết, x và y phải thoả mãn các điều kiện:

$0 \le x \le 10$, $0 \le y \le 9$;

$20x + 10y \ge 140$ hay $2x + y \ge 14$;

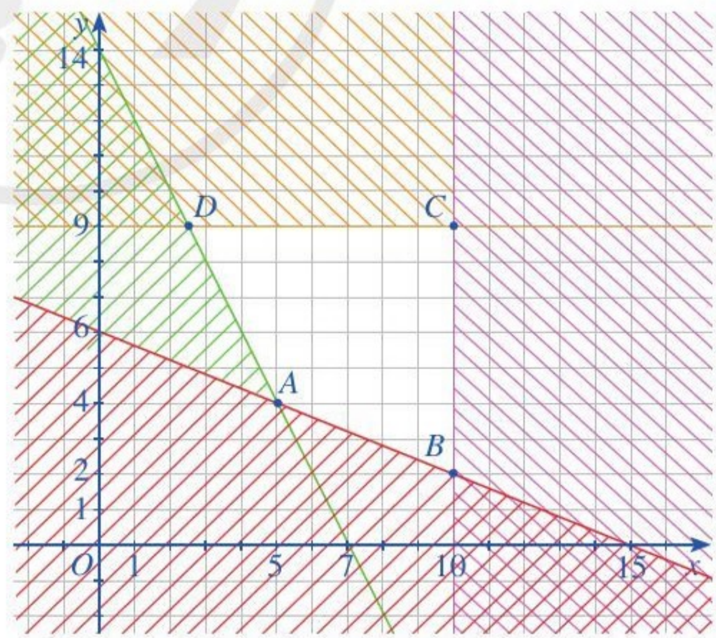
$0,6x + 1,5y \ge 9$ hay $2x + 5y \ge 30$.

Tổng số tiền cần mua nguyên liệu là $T = 4x + 3y$.

Bài toán đưa về: Tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 2x + y \ge 14 \\ 2x + 5y \ge 30 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

sao cho $T = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất.



Hình 11

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (II).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(5; 4)$, $B(10; 2)$, $C(10; 9)$, $D\left(\dfrac{5}{2} ; 9\right)$ (*Hình 11*).

Người ta chứng minh được: Biểu thức $T = 4x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = 4x + 3y$ tại cặp số $(x ; y)$ là toạ độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được T đạt giá trị nhỏ nhất bằng 32 khi $x = 5$, $y = 4$ ứng với toạ độ đỉnh A.

Vậy để chi phí nguyên liệu là ít nhất, cần sử dụng 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II; khi đó chi phí là 32 triệu đồng.

BÀI TẬP

1. Kiểm tra xem mỗi cặp số $(x ; y)$ đã cho có là nghiệm của hệ bất phương trình tương ứng không.

a) $\begin{cases} 3x + 2y \geq -6 \\ x + 4y > 4 \end{cases}$ $(0 ; 2), (1 ; 0)$;

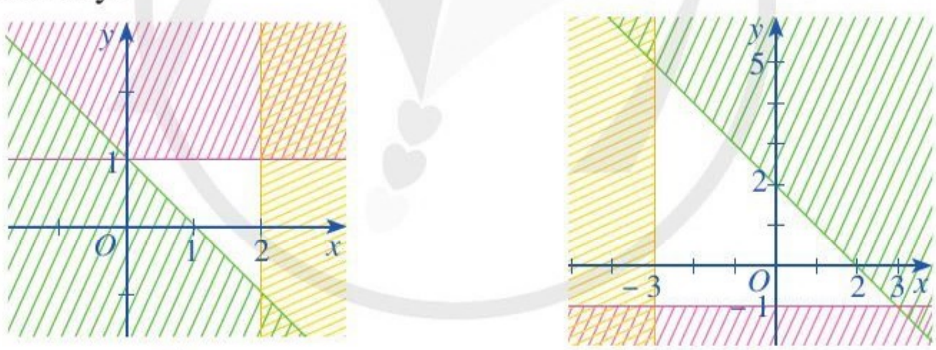
b) $\begin{cases} 4x + y \leq -3 \\ -3x + 5y \geq -12 \end{cases}$ $(-1 ; -3), (0 ; -3)$.

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} x + 2y < -4 \\ y \geq x + 5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 2y > 8 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0. \end{cases}$

3. Miền không bị gạch ở mỗi *Hình 12a*, *12b* là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào cho ở dưới đây?



a) *b)*

Hình 12

a) $\begin{cases} x + y < 2 \\ x > -3 \\ y \geq -1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y < x \\ x \leq 0 \\ y > -3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} y > -x + 1 \\ x \leq 2 \\ y < 1. \end{cases}$

4. Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất để tiền lãi thu được là cao nhất.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

1. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

a) $3x - y > 3$; b) $x + 2y \leq -4$; c) $y \geq 2x - 5$.

2. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x - 3y < 6 \\ 2x + y < 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 10y \leq 20 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq -2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y \leq 5 \\ x + y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \leq 3. \end{cases}$

3. Nhu cầu canxi tối thiểu cho một người đang độ tuổi trưởng thành trong một ngày là 1 300 mg. Trong 1 lạng đậu nành có 165 mg canxi, 1 lạng thịt có 15 mg canxi. (*Nguồn: https://hongngochospital.vn*)

Gọi x, y lần lượt là số lạng đậu nành và số lạng thịt mà một người đang độ tuổi trưởng thành ăn trong một ngày (với $x > 0$, $y > 0$).

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng canxi cần thiết trong một ngày của một người trong độ tuổi trưởng thành.

b) Chỉ ra một nghiệm $(x_0 ; y_0)$ với $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$ của bất phương trình đó.

4. Bác Ngọc thực hiện chế độ ăn kiêng với yêu cầu tối thiểu hằng ngày qua thức uống là 300 calo, 36 đơn vị vitamin A và 90 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ nhất cung cấp 60 calo, 12 đơn vị vitamin A và 10 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ hai cung cấp 60 calo, 6 đơn vị vitamin A và 30 đơn vị vitamin C.

a) Viết hệ bất phương trình mô tả số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai mà bác Ngọc nên uống mỗi ngày để đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số calo và số đơn vị vitamin hấp thụ.

b) Chỉ ra hai phương án mà bác Ngọc có thể chọn lựa số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai nhằm đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số calo và số đơn vị vitamin hấp thụ.

5. Một chuỗi nhà hàng ăn nhanh bán đồ ăn từ 10h00 sáng đến 22h00 mỗi ngày. Nhân viên phục vụ của nhà hàng làm việc theo hai ca, mỗi ca 8 tiếng, ca I từ 10h00 đến 18h00 và ca II từ 14h00 đến 22h00.

Tiền lương của nhân viên được tính theo giờ (bảng bên).

Khoảng thời gian làm việc	Tiền lương/giờ
10h00 – 18h00	20 000 đồng
14h00 – 22h00	22 000 đồng

Để mỗi nhà hàng hoạt động được thì cần tối thiểu 6 nhân viên trong khoảng 10h00 – 18h00, tối thiểu 24 nhân viên trong thời gian cao điểm 14h00 – 18h00 và không quá 20 nhân viên trong khoảng 18h00 – 22h00. Do lượng khách trong khoảng 14h00 – 22h00 thường đông hơn nên nhà hàng cần số nhân viên ca II ít nhất phải gấp đôi số nhân viên ca I. Em hãy giúp chủ chuỗi nhà hàng chỉ ra cách huy động số lượng nhân viên cho mỗi ca sao cho chi phí tiền lương mỗi ngày là ít nhất.

CHƯƠNG III HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: hàm số và đồ thị, hàm số bậc hai và ứng dụng, dấu của tam thức bậc hai, bất phương trình bậc hai một ẩn, cách giải hai dạng phương trình vô tỉ.

§1 HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Galileo Galilei (1564 – 1642), sinh tại thành phố Pisa (Italia), là nhà bác học vĩ đại của thời kì Phục Hưng. Ông được mệnh danh là "cha đẻ của khoa học hiện đại". Trước Galileo, người ta tin rằng vật nặng rơi nhanh hơn vật nhẹ, ông đã bác bỏ điều này bằng thí nghiệm nổi tiếng ở tháp nghiêng Pisa. Từ thí nghiệm của Galileo, các nhà khoa học sau này được truyền cảm hứng rằng chúng ta chỉ có thể rút ra tri thức khoa học từ các quy luật khách quan của tự nhiên, chứ không phải từ niềm tin.

Tháp nghiêng Pisa (Italia)
(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Làm thế nào để mô tả được mối liên hệ giữa thời gian t và quãng đường đi được S của vật rơi tự do? Làm thế nào để có được hình ảnh hình học minh hoạ mối liên hệ giữa hai đại lượng đó?

I. HÀM SỐ

1. Định nghĩa

1

Trong bài toán ở phần mở đầu, ta đã biết công thức tính quãng đường đi được S (m) của vật rơi tự do theo thời gian t (s) là: $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9{,}8$ m/s^2.

a) Với mỗi giá trị $t = 1$, $t = 2$, tính giá trị tương ứng của S.

b) Với mỗi giá trị của t có bao nhiêu giá trị tương ứng của S?

2

Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận y (đồng) theo công thức sau: $y = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$, trong đó x là số sản phẩm loại đó được bán ra.

a) Với mỗi giá trị $x = 100$, $x = 200$, tính giá trị tương ứng của y.

b) Với mỗi giá trị của x có bao nhiêu giá trị tương ứng của y?

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho tập hợp khác rỗng $D \subset \mathbb{R}$. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một *hàm số*.

Ta gọi x là *biến số* và y là *hàm số* của x.

Tập hợp D được gọi là *tập xác định* của hàm số.

Kí hiệu hàm số: $y = f(x)$, $x \in D$.

Ví dụ 1

a) Diện tích S của hình tròn bán kính r được tính theo công thức $S = \pi r^2$. Hỏi S có phải là hàm số của r hay không? Giải thích.

b) Cho công thức $y^2 = x$. Hỏi y có phải là hàm số của x hay không? Giải thích.

Giải

a) S là hàm số của r vì mỗi giá trị của r chỉ cho đúng một giá trị của S.

b) y không phải là hàm số của x vì khi $x = 1$ thì ta tìm được hai giá trị tương ứng của y là 1 và – 1.

1 Trong y học, một người cân nặng 60 kg chạy với tốc độ 6,5 km/h thì lượng calo tiêu thụ được tính theo công thức: $c = 4,7t$ (*Nguồn: https://irace.vn*), trong đó thời gian t được tính theo phút. Hỏi c có phải là hàm số của t không? Vì sao?

2. Cách cho hàm số

a) Hàm số cho bằng một công thức

Cùng với cách nói hàm số cho bằng công thức, ta cũng nói hàm số cho bằng biểu thức.

3 Cho hai hàm số $y = 2x + 1$ (1) và $y = \sqrt{x-2}$ (2).

a) Nêu biểu thức xác định mỗi hàm số trên.

b) Tìm x sao cho mỗi biểu thức trên có nghĩa.

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Ví dụ 2 Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{x}$;

b) $y = \sqrt{x-1}$.

2 Tìm tập xác định của hàm số:

$$y = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}.$$

Giải

a) Biểu thức $\frac{1}{x}$ có nghĩa khi $x \neq 0$. Vì vậy, tập xác định của hàm số đã cho là:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

b) Biểu thức $\sqrt{x-1}$ có nghĩa khi $x - 1 \geq 0$. Vì vậy, tập xác định của hàm số đã cho là:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} = [1 ; +\infty)$.

b) Hàm số cho bằng nhiều công thức

Một hàm số có thể được cho bằng nhiều công thức, như hàm số trong *Ví dụ 3* sau đây:

Ví dụ 3 Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ nếu } x < 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \\ 1 \text{ nếu } x > 0. \end{cases}$$

a) Tìm tập xác định của hàm số trên.

b) Tính giá trị của hàm số khi $x = -2$; $x = 0$; $x = 2\,021$.

Giải

a) $f(x)$ có nghĩa khi $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$ nên tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) $f(-2) = -1$; $f(0) = 0$; $f(2\,021) = 1$.

3 Cho hàm số:

$$y = \begin{cases} -x \text{ nếu } x < 0 \\ x \text{ nếu } x > 0. \end{cases}$$

a) Tìm tập xác định của hàm số trên.

b) Tính giá trị của hàm số khi $x = -1$; $x = 2\,022$.

Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định là D. Khi biến số x thay đổi trong tập D thì tập hợp các giá trị y tương ứng được gọi là *tập giá trị* của hàm số đã cho.

Như trong *Ví dụ 3*, ta có: Ứng với các giá trị của x thì $f(x)$ chỉ nhận một trong ba giá trị -1; 0; 1 nên tập giá trị của hàm số đó là tập hợp $\{-1; 0; 1\}$.

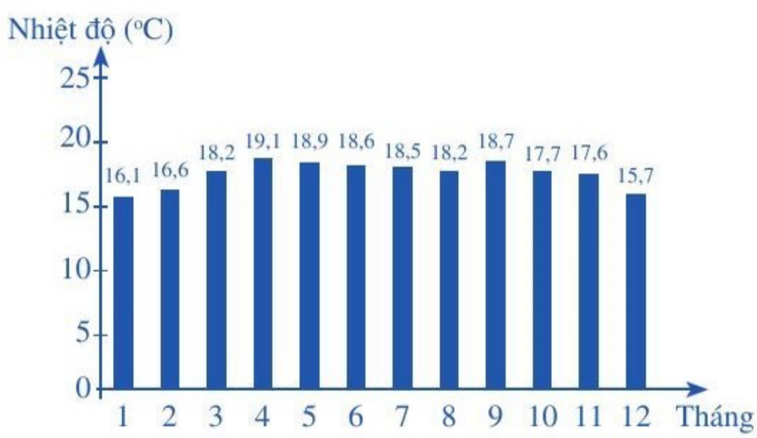
c) Hàm số không cho bằng công thức

Trong thực tiễn, có những tình huống dẫn tới những hàm số không thể cho bằng công thức (hoặc nhiều công thức). Chẳng hạn, trong ví dụ sau đây:

Ví dụ 4 Biểu đồ ở *Hình 1* cho biết nhiệt độ trung bình ở Đà Lạt theo từng tháng trong năm 2015.

a) Xác định tập hợp các tháng được nêu trong biểu đồ.

b) Tương ứng tháng với nhiệt độ trung bình của tháng đó có phải là hàm số không? Giải thích.



(*Nguồn: http://vietnamtourism.com*)

Hình 1

Giải

a) Tập hợp các tháng là $D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.

b) Mỗi tháng chỉ tương ứng với đúng một giá trị nhiệt độ trung bình nên tương ứng đó xác định một hàm số. Hàm số đó có thể được cho bằng bảng như sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ (°C)	16,1	16,6	18,2	19,1	18,9	18,6	18,5	18,2	18,7	17,7	17,6	15,7

II. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

4 Xét hàm số $y = f(x) = x^2$.

a) Tính các giá trị $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ tương ứng với giá trị $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

b) Biểu diễn trong mặt phẳng toạ độ Oxy các điểm $M_1(x_1 ; y_1)$, $M_2(x_2 ; y_2)$.

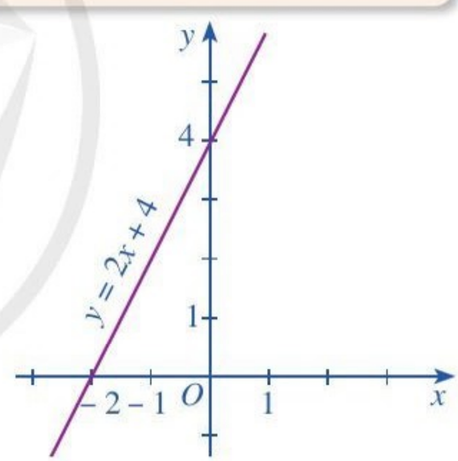
Cũng như vậy, với mỗi giá trị của biến số x, ta có thể xác định được điểm $M(x ; y)$ với $y = f(x)$ trong mặt phẳng toạ độ. Khi biến số x thay đổi trên tập xác định, điểm $M(x ; y)$ sẽ thay đổi theo trong mặt phẳng toạ độ Oxy và tạo nên một đường. Đường đó gọi là *đồ thị của hàm số* $y = f(x)$.

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D là tập hợp các điểm $M(x ; f(x))$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy với mọi x thuộc D.

Ví dụ 5 Cho hàm số $y = 2x + 4$.

a) Vẽ đồ thị hàm số trên.

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho bốn điểm: $A(-1 ; 2)$, $B(1 ; 6)$, $C(2\,020 ; 2\,021)$, $D(2\,030 ; 4\,064)$. Điểm nào thuộc đồ thị hàm số trên? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số trên?



Hình 2

Giải

a) Khi $x = 0$ thì $y = 4$; khi $y = 0$ thì $x = -2$. Vậy đồ thị hàm số $y = 2x + 4$ là đường thẳng cắt trục Oy tại điểm $(0 ; 4)$, cắt trục Ox tại điểm $(-2 ; 0)$ (*Hình 2*).

b) Khi $x = -1$; $x = 1$; $x = 2\,020$; $x = 2\,030$ thì lần lượt $y = 2$; $y = 6$; $y = 4\,044$; $y = 4\,064$. Vậy các điểm $A(-1 ; 2)$, $B(1 ; 6)$, $D(2\,030 ; 4\,064)$ thuộc đồ thị hàm số và điểm $C(2\,020 ; 2\,021)$ không thuộc đồ thị hàm số.

Nhận xét

- Điểm $M(a ; b)$ trong mặt phẳng toạ độ *thuộc* đồ thị hàm số $y = f(x)$, $x \in D$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a \in D \\ b = f(a). \end{cases}$

4 Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ và ba điểm $M(-1 ; -1)$, $N(0 ; 2)$, $P(2 ; 1)$. Điểm nào thuộc đồ thị hàm số trên? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số trên?

- Để chứng tỏ điểm $M(a\ ;\ b)$ trong mặt phẳng toạ độ *không thuộc* đồ thị hàm số $y = f(x)$, $x \in D$, ta có thể kiểm tra một trong hai khả năng sau:

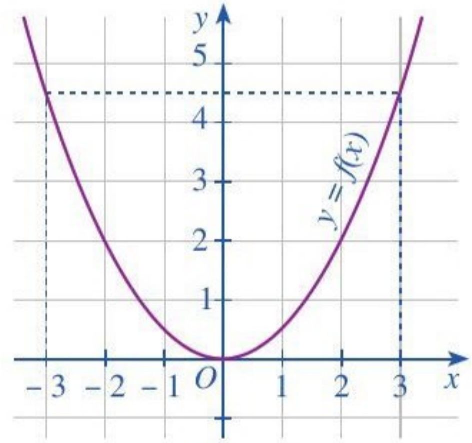
Khả năng 1: Chứng tỏ rằng $a \notin D$.

Khả năng 2: Khi $a \in D$ thì chứng tỏ rằng $b \neq f(a)$.

Ví dụ 6 Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như *Hình 3*.

a) Trong các điểm có toạ độ $(-2\ ;\ 2)$, $(0\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ 1)$, $(2\ ;\ 2)$, $(1\ ;\ 1)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

b) Quan sát đồ thị, tìm $f(3)$ và những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\frac{9}{2}$.



Hình 3

Giải

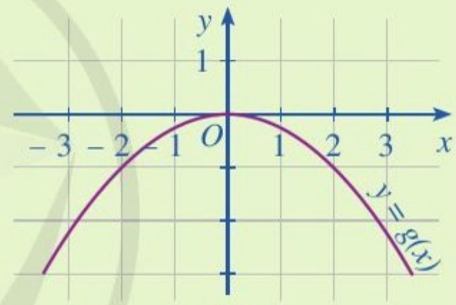
a) Các điểm thuộc đồ thị hàm số có toạ độ là: $(-2\ ;\ 2)$, $(0\ ;\ 0)$, $(2\ ;\ 2)$.

Các điểm không thuộc đồ thị hàm số có toạ độ là: $(0\ ;\ 1)$, $(1\ ;\ 1)$.

b) Quan sát đồ thị, ta có: $f(3) = \frac{9}{2}$.

Toạ độ những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\frac{9}{2}$ là: $\left(-3\ ;\ \frac{9}{2}\right)$, $\left(3\ ;\ \frac{9}{2}\right)$.

5 Dựa vào *Hình 4*, xác định $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$.



Hình 4

Ví dụ 7 Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như *Hình 5*.

a) Xác định toạ độ các giao điểm của đồ thị đó với hai trục toạ độ.

b) Hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi công thức nào?

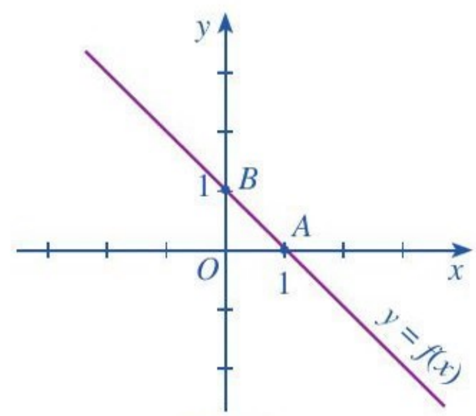
Giải

a) Toạ độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(1\ ;\ 0)$.
Toạ độ giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0\ ;\ 1)$.

b) Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng cắt cả hai trục toạ độ nên hàm số đó là hàm số bậc nhất, tức là $y = f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$. Do hai điểm $A(1\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 1)$ đều nằm trên đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} a.1 + b = 0 \\ a.0 + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1. \end{cases}$$

Vậy $y = f(x) = -x + 1$.



Hình 5

III. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

1. Khái niệm

5 Cho hàm số $f(x) = x + 1$.

a) So sánh $f(1)$ và $f(2)$.

b) Chứng minh rằng nếu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

Như vậy, hàm số $f(x) = x + 1$ có tính chất sau đây: Khi x *tăng* thì $f(x)$ cũng *tăng*. Ta nói hàm số trên là *đồng biến* trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$.

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là *đồng biến* trên khoảng $(a ; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a ; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là *nghịch biến* trên khoảng $(a ; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a ; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Ví dụ 8 Chứng tỏ hàm số $y = 6x^2$ đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

Giải

Xét hai số bất kì $x_1, x_2 \in (0 ; +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$.

Ta có: $0 < x_1 < x_2$ nên $6x_1^2 < 6x_2^2$ hay $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

6 Chứng tỏ hàm số $y = 6x^2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$.

Nhận xét: Xét sự biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng hàm số đồng biến và các khoảng hàm số nghịch biến. Kết quả xét sự biến thiên được tổng kết trong một *bảng biến thiên.*

Chẳng hạn, sau đây là bảng biến thiên của hàm số $y = 6x^2$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

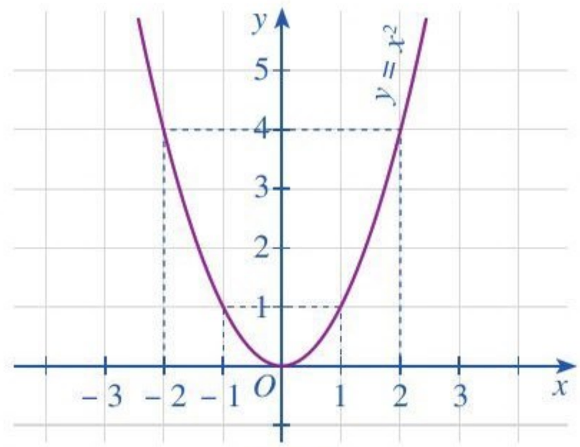
- Dấu mũi tên đi xuống (từ $+\infty$ đến 0) diễn tả hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$.
- Dấu mũi tên đi lên (từ 0 đến $+\infty$) diễn tả hàm số đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

2. Mô tả hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến bằng đồ thị

6 Cho đồ thị hàm số: $y = f(x) = x^2$ như *Hình 6*.

a) So sánh $f(-2)$, $f(-1)$. Nêu nhận xét về sự biến thiên của giá trị hàm số khi giá trị biến x tăng dần từ -2 đến -1.

b) So sánh $f(1)$, $f(2)$. Nêu nhận xét về sự biến thiên của giá trị hàm số khi giá trị biến x tăng dần từ 1 đến 2.



Hình 6

Nhận xét

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(a ; b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi lên" trên khoảng đó.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a ; b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi xuống" trên khoảng đó.

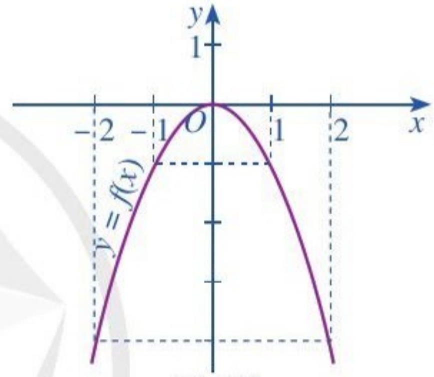
Khi nói đồ thị "đi lên" hay "đi xuống", ta luôn kể theo chiều tăng của biến số, nghĩa là kể từ trái qua phải.

Ví dụ 9 Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như *Hình 7*. Quan sát đồ thị và cho biết phát biểu nào sau đây là đúng.

a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2 ; -1)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1 ; 2)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1 ; 1)$.



Hình 7

Giải

a) Phát biểu "Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2 ; -1)$" là đúng vì đồ thị hàm số đã cho "đi lên" trên khoảng đó.

b) Phát biểu "Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1 ; 2)$" là đúng vì đồ thị hàm số đã cho "đi xuống" trên khoảng đó.

c) Phát biểu "Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1 ; 1)$" là sai vì đồ thị hàm số đã cho vừa có phần "đi lên" vừa có phần "đi xuống" trên khoảng đó.

BÀI TẬP

1. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = -x^2$; b) $y = \sqrt{2 - 3x}$; c) $y = \dfrac{4}{x+1}$; d) $y = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

2. *Bảng 1* dưới đây cho biết chỉ số $PM_{2,5}$ (bụi mịn) ở Thành phố Hà Nội từ tháng 1 đến tháng 12 của năm 2019.

	Trung bình năm 2019	Tháng											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$PM_{2,5}$ ($\mu g/m^3$)	46,9	59,3	36,0	50,2	40,3	45,8	36,5	30,4	33,1	48,3	43,2	66,3	72,7

(*Nguồn: Báo cáo chất lượng không khí thế giới 2019*)

Bảng 1

a) Nêu chỉ số $PM_{2,5}$ trong tháng 2; tháng 5; tháng 10.

b) Chỉ số $PM_{2,5}$ có phải là hàm số của tháng không? Tại sao?

c) Bụi mịn $PM_{2,5}$ có đường kính nhỏ hơn 2,5 μm (mi-crô-mét) dễ dàng xâm nhập vào cơ thể con người thông qua đường hô hấp và gây nên một số bệnh nguy hiểm như đột quỵ, tim mạch,... Em hãy nêu một số biện pháp bảo vệ bản thân trước bụi mịn.

3. Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/11/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến 250 g như trong bảng sau:

Khối lượng đến 250 g	Mức cước (đồng)
Đến 20 g	4 000
Trên 20 g đến 100 g	6 000
Trên 100 g đến 250 g	8 000

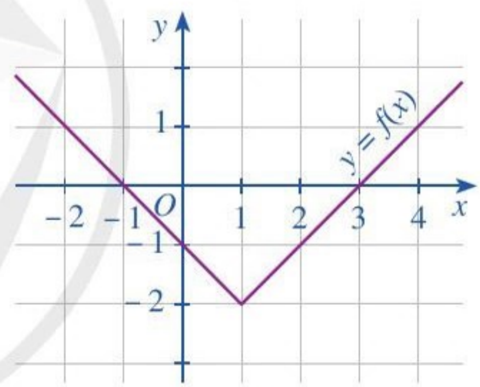
a) Số tiền dịch vụ thư cơ bản phải trả y (đồng) có là hàm số của khối lượng thư cơ bản x (g) hay không? Nếu đúng, hãy xác định những công thức tính y.

b) Tính số tiền phải trả khi bạn Dương gửi thư có khối lượng 150 g, 200 g (không kể phụ phí và thuế VAT).

4. Cho hàm số $y = -2x^2$.

a) Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ lần lượt bằng – 2; 3 và 10.

b) Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng – 18.



Hình 8

5. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như *Hình 8*.

a) Trong các điểm có toạ độ $(1 ; -2)$, $(0 ; 0)$, $(2 ; -1)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

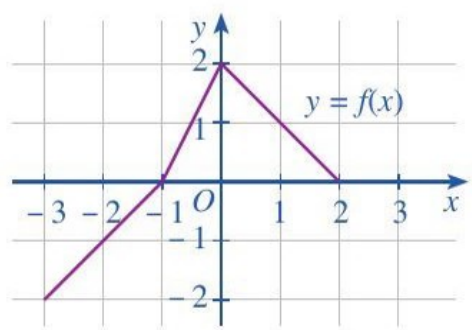
b) Xác định $f(0)$; $f(3)$.

c) Tìm điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng 0.

6. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x}$. Chứng tỏ hàm số đã cho:

a) Nghịch biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$;

b) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$.



Hình 9

7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như *Hình 9*. Chỉ ra khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

8. Một lớp muốn thuê một chiếc xe khách cho chuyến tham quan với tổng đoạn đường cần di chuyển trong khoảng từ 550 km đến 600 km, có hai công ty được tiếp cận để tham khảo giá. Công ty *A* có giá khởi đầu là 3,75 triệu đồng cộng thêm 5 000 đồng cho mỗi ki-lô-mét chạy xe. Công ty *B* có giá khởi đầu là 2,5 triệu đồng cộng thêm 7 500 đồng cho mỗi ki-lô-mét chạy xe. Lớp đó nên chọn công ty nào để chi phí là thấp nhất?

§2 HÀM SỐ BẬC HAI. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

Cầu cảng Sydney là một trong những hình ảnh biểu tượng của thành phố Sydney và nước Australia. Độ cao y (m) của một điểm thuộc vòng cung thành cầu cảng Sydney có thể biểu thị theo độ dài x (m) tính từ chân cầu bên trái dọc theo đường nối với chân cầu bên phải như sau (*Hình 10*):

$$y = -\,0{,}00188(x - 251{,}5)^2 + 118.$$

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 10

Hàm số $y = -\,0{,}00188(x - 251{,}5)^2 + 118$ có gì đặc biệt?

I. HÀM SỐ BẬC HAI

1 Cho hàm số $y = -\,0{,}00188(x - 251{,}5)^2 + 118$.

a) Viết công thức xác định hàm số trên về dạng đa thức theo luỹ thừa với số mũ giảm dần của x.

b) Bậc của đa thức trên bằng bao nhiêu?

c) Xác định hệ số của x^2, hệ số của x và hệ số tự do.

Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số và a khác 0. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1 Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai? Với những hàm số bậc hai đó, xác định a, b, c lần lượt là hệ số của x^2, hệ số của x và hệ số tự do.

a) $y = 8x^2 - 6x + 1$; b) $y = 2x + 2\,021$.

Giải

a) Hàm số $y = 8x^2 - 6x + 1$ là hàm số bậc hai có hệ số của x^2 bằng 8, hệ số của x bằng $-\,6$, hệ số tự do bằng 1.

b) Hàm số $y = 2x + 2\,021$ không phải là hàm số bậc hai.

1 Cho hai ví dụ về hàm số bậc hai.

II. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI

2 Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$.

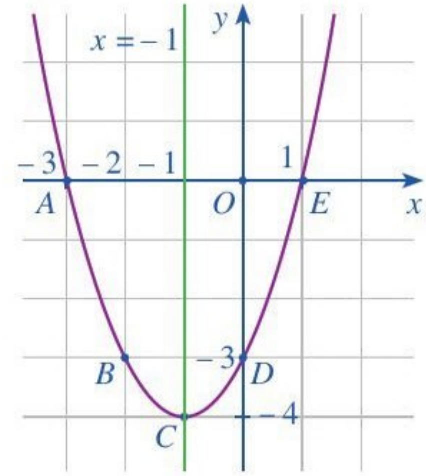
a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	$-\,3$	$-\,2$	$-\,1$	0	1
y	?	?	?	?	?

b) Vẽ các điểm $A(-3 ; 0)$, $B(-2 ; -3)$, $C(-1 ; -4)$, $D(0 ; -3)$, $E(1 ; 0)$ của đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

c) Vẽ đường cong đi qua 5 điểm A, B, C, D, E. Đường cong đó là đường parabol và cũng chính là đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ (*Hình 11*).

d) Cho biết toạ độ của điểm thấp nhất và phương trình trục đối xứng của parabol đó. Đồ thị hàm số đó quay bề lõm lên trên hay xuống dưới?



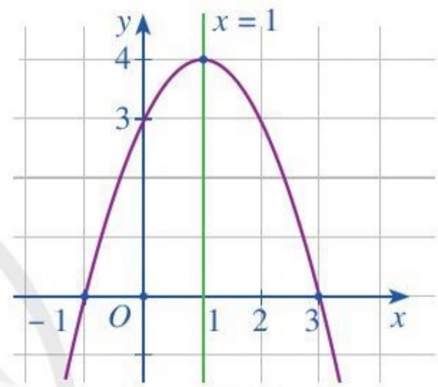
Hình 11

Nhận xét: Đường cong (liền nét) đi qua 5 điểm A, B, C, D, E (*Hình 11*) cho ta đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Đó là đường parabol quay bề lõm lên trên, có toạ độ của điểm thấp nhất là $(-1; -4)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$.

3 Cho hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$.

a) Tìm toạ độ 5 điểm thuộc đồ thị hàm số trên có hoành độ lần lượt là -1, 0, 1, 2, 3 rồi vẽ chúng trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

b) Vẽ đường cong đi qua 5 điểm trên. Đường cong đó cũng là đường parabol và là đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ (*Hình 12*).



Hình 12

c) Cho biết toạ độ của điểm cao nhất và phương trình trục đối xứng của parabol đó. Đồ thị hàm số đó quay bề lõm lên trên hay xuống dưới?

Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm với toạ độ $\left(-\dfrac{b}{2a} ; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ và trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Nhận xét: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta có: $-\dfrac{\Delta}{4a} = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Để vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta thực hiện các bước:

- Xác định toạ độ đỉnh: $\left(-\dfrac{b}{2a} ; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$;
- Vẽ trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a}$;
- Xác định một số điểm đặc biệt, chẳng hạn: giao điểm với trục tung (có toạ độ $(0 ; c)$) và trục hoành (nếu có), điểm đối xứng với điểm có toạ độ $(0 ; c)$ qua trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

- Vẽ đường parabol đi qua các điểm đã xác định ta nhận được đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$.

Chú ý: Nếu $a > 0$ thì parabol có bề lõm quay lên trên, nếu $a < 0$ thì parabol có bề lõm quay xuống dưới.

> **2** Vẽ đồ thị mỗi hàm số bậc hai sau:
> a) $y = x^2 - 4x - 3$;
> b) $y = x^2 + 2x + 1$;
> c) $y = -x^2 - 2$.

Ví dụ 2 Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 - 2x - 3$.

Giải

Ta có: $a = 1, b = -2, c = -3, \Delta = (-2)^2 - 4 . 1 . (-3) = 16$.

– Toạ độ đỉnh $I(1 ; -4)$.

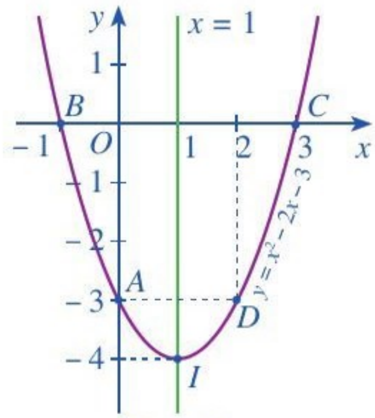
– Trục đối xứng $x = 1$.

– Giao điểm của parabol với trục tung là $A(0 ; -3)$.

– Giao điểm của parabol với trục hoành là $B(-1 ; 0)$ và $C(3 ; 0)$.

– Điểm đối xứng với điểm $A(0 ; -3)$ qua trục đối xứng $x = 1$ là $D(2 ; -3)$.

Vẽ parabol đi qua các điểm được xác định ở trên, ta nhận được đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 3$ như *Hình 13*.



Hình 13

4

a) Quan sát đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 + 2x - 3$ trong *Hình 11*. Xác định khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số và lập bảng biến thiên của hàm số đó.

b) Quan sát đồ thị hàm số bậc hai $y = -x^2 + 2x + 3$ trong *Hình 12*. Xác định khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số và lập bảng biến thiên của hàm số đó.

Nhận xét: Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty ; -\dfrac{b}{2a}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a} ; +\infty\right)$.
- Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty ; -\dfrac{b}{2a}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a} ; +\infty\right)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số bậc hai như sau:

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$ ↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

Ví dụ 3 Nêu khoảng đồng biến, nghịch biến của mỗi hàm số sau:

a) $y = 3x^2 + 5x - 2$; b) $y = -4x^2 + 6x + 3$.

Giải

a) Ta có: $a = 3 > 0, b = 5, -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{6}$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

b) Ta có: $a = -4 < 0, b = 6, -\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

3 Lập bảng biến thiên của mỗi hàm số sau:

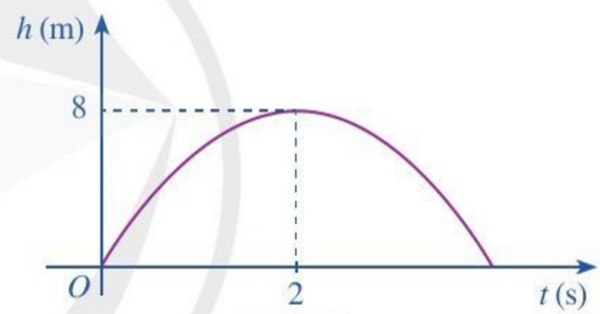
a) $y = x^2 - 3x + 4$;

b) $y = -2x^2 + 5$.

III. ỨNG DỤNG

Các hàm số bậc hai có nhiều ứng dụng trong việc giải quyết những vấn đề thực tiễn. Chẳng hạn, ta sẽ tìm hiểu ứng dụng đó thông qua ví dụ sau:

Ví dụ 4 Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. *Hình 14* minh hoạ quỹ đạo của quả bóng là một phần của cung parabol trong mặt phẳng toạ độ *Oth*, trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên và h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ mặt đất. Sau khoảng 2 s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8 m.



Hình 14

a) Tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống này.

b) Tính độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3 s.

c) Sau bao nhiêu giây thì quả bóng chạm đất kể từ khi đá lên?

Giải

a) Gọi hàm số bậc hai biểu thị độ cao h (m) theo thời gian t (s) là: $h = f(t) = at^2 + bt + c$ $(a < 0)$.

Theo giả thiết, quả bóng được đá lên từ mặt đất, nghĩa là $f(0) = c = 0$, do đó $f(t) = at^2 + bt$.

Sau 2 s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8 m nên

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ -4a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8. \end{cases}$$

Vậy $h = f(t) = -2t^2 + 8t$.

b) Độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3 s là:

$h = f(3) = -2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 6$ (m).

c) *Cách 1.* Quả bóng chạm đất (trở lại) khi độ cao $h = 0$, tức là:

$$\begin{cases} t > 0 \\ -2t^2 + 8t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4.$$

Vì thế sau 4 s quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

4 Trong bài toán ở phần mở đầu, độ cao y (m) của một điểm thuộc vòng cung thành cầu cảng Sydney đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Cách 2. Quỹ đạo chuyển động của quả bóng là một phần của cung parabol có trục đối xứng là đường thẳng $t = 2$. Điểm xuất phát và điểm quả bóng chạm đất (trở lại) đối xứng nhau qua đường thẳng $t = 2$. Vì thế sau 4 s quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

BÀI TẬP

1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai? Với những hàm số bậc hai đó, xác định a, b, c lần lượt là hệ số của x^2, hệ số của x và hệ số tự do.

a) $y = -3x^2$; b) $y = 2x(x^2 - 6x + 1)$; c) $y = 4x(2x - 5)$.

2. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 4$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua điểm $M(1 ; 12)$ và $N(-3 ; 4)$;

b) Có đỉnh là $I(-3 ; -5)$.

3. Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

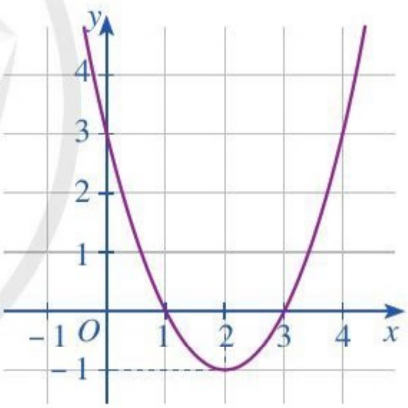
a) $y = 2x^2 - 6x + 4$; b) $y = -3x^2 - 6x - 3$.

4. Cho đồ thị hàm số bậc hai ở *Hình 15*.

a) Xác định trục đối xứng, toạ độ đỉnh của đồ thị hàm số.

b) Xác định khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.

c) Tìm công thức xác định hàm số.



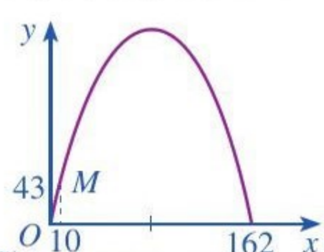
Hình 15

5. Nêu khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của mỗi hàm số sau:

a) $y = 5x^2 + 4x - 1$; b) $y = -2x^2 + 8x + 6$.

6. Khi du lịch đến thành phố St. Louis (Mỹ), ta sẽ thấy một cái cổng lớn có hình parabol hướng bề lõm xuống dưới, đó là cổng Arch. Giả sử ta lập một hệ toạ độ Oxy sao cho một chân cổng đi qua gốc O như *Hình 16* (x và y tính bằng mét), chân kia của cổng ở vị trí có toạ độ $(162 ; 0)$. Biết một điểm M trên cổng có toạ độ là $(10 ; 43)$. Tính chiều cao của cổng (tính từ điểm cao nhất trên cổng xuống mặt đất), làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.

Cổng Arch (St.Louis, Mỹ)
(Nguồn: https://shutterstock.com)



Hình 16

§3 DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận y (đồng) theo công thức sau: $y = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$, trong đó x là số sản phẩm được bán ra. Như vậy, việc xác định lãi hay lỗ khi kinh doanh loại sản phẩm trên dẫn tới việc xét dấu của $y = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$, tức là ta cần xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$.

Làm thế nào để xét dấu của tam thức bậc hai?

Đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ còn gọi là *tam thức bậc hai*. Sau đây, ta sẽ làm quen với việc xét dấu của tam thức bậc hai.

I. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Ta đã biết:

- $ax^2 + bx + c > 0$ ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía trên trục hoành.
- $ax^2 + bx + c < 0$ ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía dưới trục hoành.

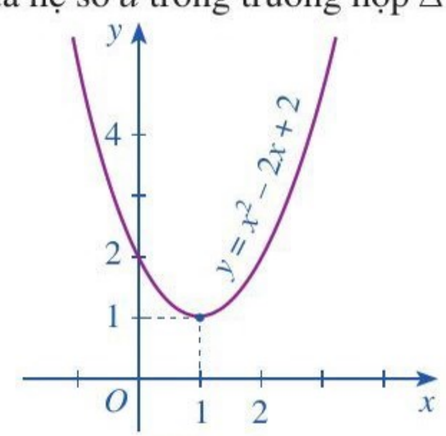
Như vậy, ta có thể nhận ra dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ là "+" (hoặc " – ") thông qua việc nhận ra phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía trên (hoặc phía dưới) trục hoành.

1

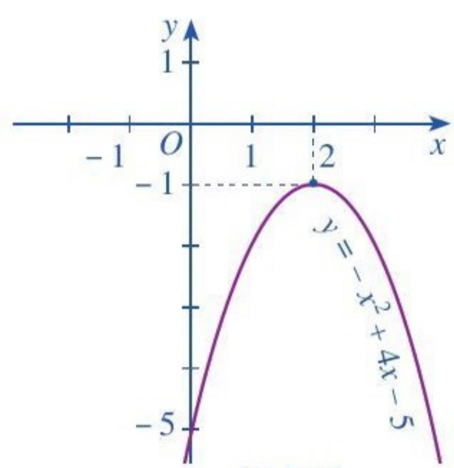
a) Quan sát *Hình 17* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2x + 2$ trên $\mathbb{R}$.

b) Quan sát *Hình 18* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 5$ trên $\mathbb{R}$.

c) Từ đó rút ra mối liên hệ về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ trên $\mathbb{R}$ với dấu của hệ số a trong trường hợp $\Delta < 0$.



Hình 17



Hình 18

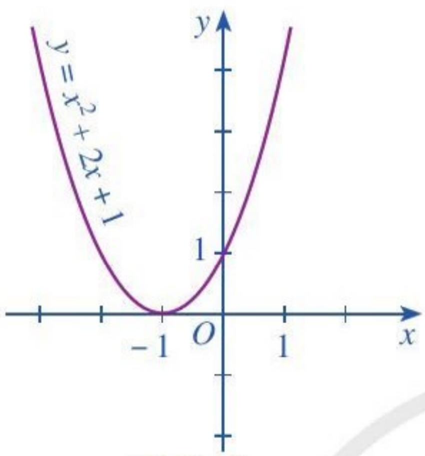
Nhận xét: Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2

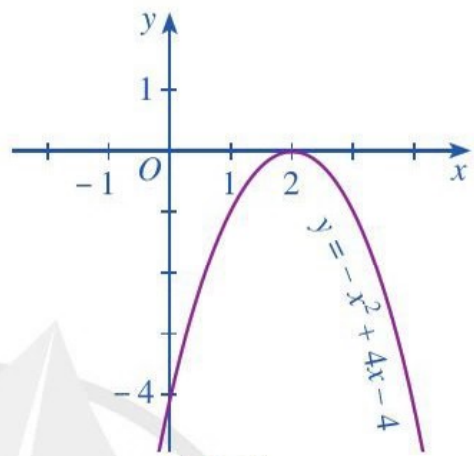
a) Quan sát *Hình 19* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

b) Quan sát *Hình 20* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.

c) Từ đó rút ra mối liên hệ về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ với dấu của hệ số a trong trường hợp $\Delta = 0$.



Hình 19



Hình 20

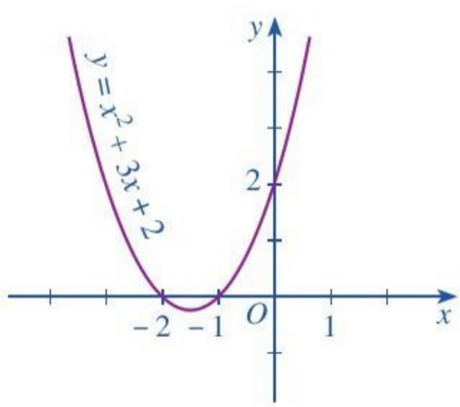
Nhận xét: Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$.

3

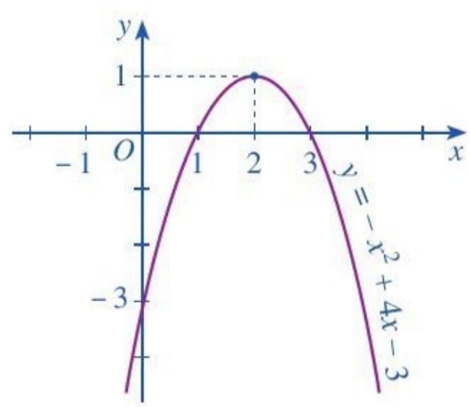
a) Quan sát *Hình 21* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 3x + 2$ tuỳ theo các khoảng của x.

b) Quan sát *Hình 22* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ tuỳ theo các khoảng của x.

c) Từ đó rút ra mối liên hệ về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ với dấu của hệ số a tuỳ theo các khoảng của x trong trường hợp $\Delta > 0$.



Hình 21



Hình 22

Nhận xét: Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty\,; x_1)$ và $(x_2\,; +\infty)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc khoảng $(x_1\,; x_2)$, trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của $f(x)$ và $x_1 < x_2$.

Người ta đã chứng minh được định lí về dấu tam thức bậc hai sau:

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$.

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$. Khi đó:

$f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$;

$f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc khoảng $(x_1; x_2)$.

Nhận xét: Trong định lí, có thể thay biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta' = (b')^2 - ac$ với $b = 2b'$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = 3x^2 - x + 1$;

b) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$.

Giải

a) Tam thức bậc hai $f(x) = 3x^2 - x + 1$ có $\Delta = -11 < 0$, hệ số $a = 3 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Tam thức bậc hai $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ có $\Delta = 0$, nghiệm kép $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ và hệ số $a = 4 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

1 Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$;

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

Ví dụ 2 Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Giải

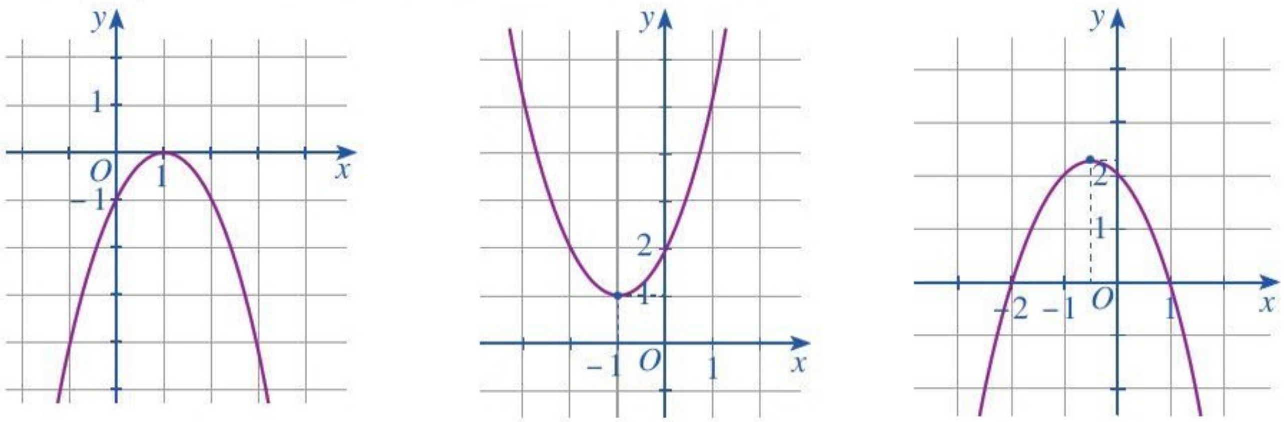
Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 3x + 2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ và hệ số $a = 1 > 0$.

Ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2 Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai: $f(x) = -x^2 - 2x + 8$.

Ví dụ 3 Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ ứng với đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho ở mỗi *Hình 23a*, *23b*, *23c*.



a) b) c)

Hình 23

Giải

a) Từ đồ thị *Hình 23a* ta có nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ là $x = 1$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

b) Từ đồ thị *Hình 23b* ta có tam thức bậc hai $f(x)$ vô nghiệm. Bảng xét dấu của $f(x)$ là:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

c) Từ đồ thị *Hình 23c* ta có tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ví dụ 4 Trong bài toán ở phần mở đầu, dựa theo số sản phẩm bán ra, cho biết doanh nghiệp có lãi khi nào, bị lỗ khi nào.

Giải

Xét tam thức bậc hai $f(x) = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$.

Nhận thấy $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = \dfrac{-460 + \sqrt{43\,600}}{-2} \approx 125{,}6$; $x_2 = \dfrac{-460 - \sqrt{43\,600}}{-2} \approx 334{,}4$

và hệ số $a = -200 < 0$. Ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vì x là số nguyên dương nên:

+) Doanh nghiệp có lãi khi và chỉ khi $f(x) > 0$, tức là $126 \le x \le 334$.

+) Doanh nghiệp bị lỗ khi và chỉ khi $f(x) < 0$, tức là $x \le 125$ hoặc $x \ge 335$.

Vậy doanh nghiệp có lãi khi bán từ 126 đến 334 sản phẩm, doanh nghiệp bị lỗ khi bán tối đa 125 sản phẩm hoặc bán tối thiểu 335 sản phẩm.

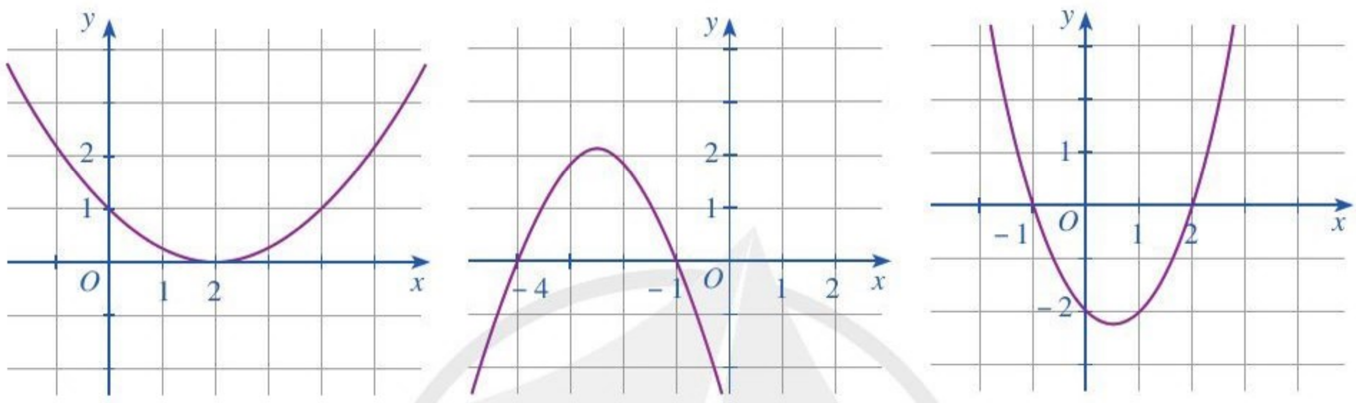
BÀI TẬP

1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) $x^2 - 2x - 3 > 0$ khi và chỉ khi $x \in (-\infty ; -1) \cup (3 ; +\infty)$.

b) $x^2 - 2x - 3 < 0$ khi và chỉ khi $x \in [-1 ; 3]$.

2. Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ với đồ thị được cho ở mỗi *Hình 24a, 24b, 24c*.



a) *b)* *c)*

Hình 24

3. Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$; b) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$; c) $f(x) = 2x^2 - 3x + 10$;

d) $f(x) = -5x^2 + 2x + 3$; e) $f(x) = -4x^2 + 8x - 4$; g) $f(x) = -3x^2 + 3x - 1$.

4. Một công ty du lịch thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:

50 khách đầu tiên có giá là 300 000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 50 người đăng kí thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 5 000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 51 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x.

b) Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 15 080 000 đồng.

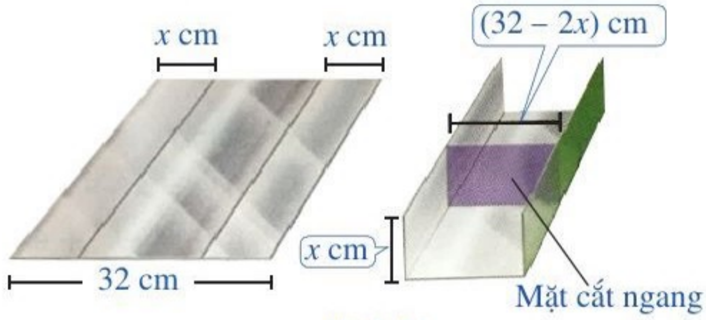
5. Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2 + 180Q + 140\,000$ (nghìn đồng). Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1 200 nghìn đồng.

a) Xác định lợi nhuận xí nghiệp thu được sau khi bán hết Q sản phẩm đó, biết rằng lợi nhuận là hiệu của doanh thu trừ đi tổng chi phí để sản xuất.

b) Xí nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để không bị lỗ? Biết rằng các sản phẩm được sản xuất ra đều bán hết.

§4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang 32 cm thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông (*Hình 25*). Để đảm bảo kĩ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng 120 cm^2.



Hình 25

Rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là bao nhiêu xăng-ti-mét?

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1 Quan sát và nêu đặc điểm của biểu thức ở vế trái của bất phương trình $3x^2 - 4x - 8 < 0$.

- *Bất phương trình bậc hai ẩn x* là bất phương trình có một trong các dạng sau: $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$, trong đó a, b, c là các số thực đã cho, $a \neq 0$.
- Đối với bất phương trình bậc hai có dạng $ax^2 + bx + c < 0$, mỗi số $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $ax_0^2 + bx_0 + c < 0$ được gọi là một *nghiệm* của bất phương trình đó.

Tập hợp các nghiệm x_0 như thế còn được gọi là *tập nghiệm* của bất phương trình bậc hai đã cho.

Nghiệm và tập nghiệm của các dạng bất phương trình bậc hai ẩn x còn lại được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 1 Cho bất phương trình bậc hai một ẩn $x^2 - 4x + 3 < 0$ (1). Trong các giá trị sau đây của x, giá trị nào là nghiệm của bất phương trình (1)?

a) $x = 2$; b) $x = 0$; c) $x = 3$.

Giải

a) Với $x = 2$, ta có: $2^2 - 4 \,.\, 2 + 3 = -1 < 0$. Vậy $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình (1).

b) Với $x = 0$, ta có: $0^2 - 4 \,.\, 0 + 3 = 3 > 0$. Vậy $x = 0$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

c) Với $x = 3$, ta có: $3^2 - 4 \,.\, 3 + 3 = 0$. Vậy $x = 3$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

1 a) Cho hai ví dụ về bất phương trình bậc hai một ẩn.

b) Cho hai ví dụ về bất phương trình mà không phải là bất phương trình bậc hai một ẩn.

Chú ý: Giải bất phương trình bậc hai ẩn x là đi tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

II. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách xét dấu của tam thức bậc hai

2

a) Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - x - 2$.

b) Giải bất phương trình $x^2 - x - 2 > 0$.

Nhận xét: Để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$), ta chuyển việc giải bất phương trình đó về việc tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu "+". Cụ thể, ta làm như sau:

Bước 1. Xác định dấu của hệ số a và tìm nghiệm của $f(x)$ (nếu có).

Bước 2. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai để tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu "+".

Chú ý: Các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ được giải bằng cách tương tự.

Ví dụ 2 Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 - 5x + 2 > 0$;

b) $-x^2 - 2x + 8 > 0$.

2 Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $3x^2 - 2x + 4 \leq 0$;

b) $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$.

Giải

a) Tam thức bậc hai $2x^2 - 5x + 2$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$ và có hệ số $a = 2 > 0$.

Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $2x^2 - 5x + 2$ mang dấu "+" là $\left(-\infty ; \frac{1}{2}\right) \cup (2 ; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $2x^2 - 5x + 2 > 0$ là $\left(-\infty ; \frac{1}{2}\right) \cup (2 ; +\infty)$.

b) Tam thức bậc hai $-x^2 - 2x + 8$ có hai nghiệm $x_1 = -4$, $x_2 = 2$ và có hệ số $a = -1 < 0$.

Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-x^2 - 2x + 8$ mang dấu "+" là $(-4 ; 2)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 - 2x + 8 > 0$ là $(-4 ; 2)$.

2. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách sử dụng đồ thị

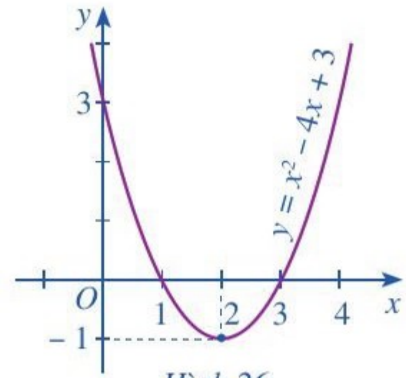
3 Cho bất phương trình $x^2 - 4x + 3 > 0$ (2).

Quan sát parabol (P): $y = x^2 - 4x + 3$ ở *Hình 26* và cho biết:

a) Bất phương trình (2) biểu diễn phần parabol (P) nằm ở phía nào của trục hoành.

b) Phần parabol (P) nằm phía trên trục hoành ứng với những giá trị nào của x.

Bất phương trình (2) biểu diễn phần parabol (P) nằm phía trên trục hoành tương ứng với $x < 1$ hoặc $x > 3$.



Hình 26

Nhận xét

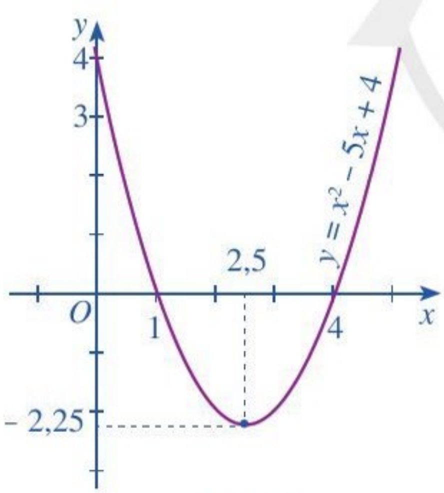
- *Giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$* là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía trên trục hoành.
- Tương tự, giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$ là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía dưới trục hoành.

Như vậy, để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$) bằng cách sử dụng đồ thị, ta có thể làm như sau: Dựa vào parabol $y = ax^2 + bx + c$, ta tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol đó nằm phía trên trục hoành. Đối với các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, ta cũng làm tương tự.

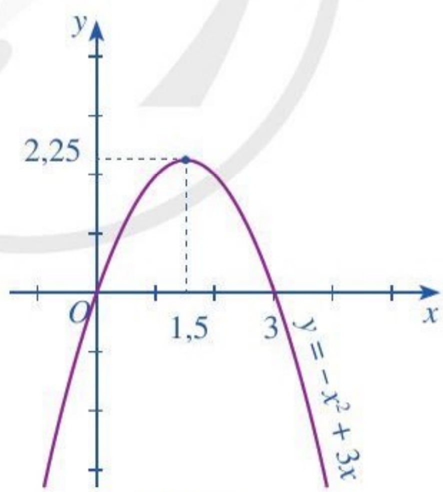
Ví dụ 3 Quan sát đồ thị ở *Hình 27, Hình 28* và giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $x^2 - 5x + 4 < 0$.

b) $-x^2 + 3x > 0$.



Hình 27



Hình 28

Giải

a) Quan sát đồ thị ở *Hình 27*, ta thấy: $x^2 - 5x + 4 < 0$ biểu diễn phần parabol $y = x^2 - 5x + 4$ nằm phía dưới trục hoành, tương ứng với $1 < x < 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 5x + 4 < 0$ là khoảng $(1 ; 4)$.

3 Giải mỗi bất phương trình bậc hai sau bằng cách sử dụng đồ thị:

a) $x^2 + 2x + 2 > 0$;

b) $-3x^2 + 2x - 1 > 0$.

b) Quan sát đồ thị ở *Hình 28,* ta thấy: $-x^2 + 3x > 0$ biểu diễn phần parabol $y = -x^2 + 3x$ nằm phía trên trục hoành, tương ứng với $0 < x < 3$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 3x > 0$ là khoảng $(0 ; 3)$.

III. ỨNG DỤNG CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Bất phương trình bậc hai một ẩn có nhiều ứng dụng, chẳng hạn: giải một số hệ bất phương trình; ứng dụng vào tính toán lợi nhuận trong kinh doanh; tính toán điểm rơi trong pháo binh; ...

Chúng ta sẽ làm quen với những ứng dụng đó qua một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 4 Giải bài toán ở phần mở đầu.

Giải

Khi chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như *Hình 25* thì kích thước của mặt cắt ngang là x (cm) và $32 - 2x$ (cm). Khi đó diện tích mặt cắt ngang là $(32 - 2x)x$ (cm^2).

Ta thấy: Diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước lớn hơn 120 cm^2 khi và chỉ khi

$$(32 - 2x)x \geq 120 \Leftrightarrow -x^2 + 16x - 60 \geq 0.$$

Tam thức $f(x) = -x^2 + 16x - 60$ có hai nghiệm $x_1 = 6$, $x_2 = 10$ và hệ số $a = -1 < 0$. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $f(x)$ mang dấu "+" là khoảng $(6 ; 10)$. Do đó tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 16x - 60 \geq 0$ là đoạn $[6 ; 10]$.

Vậy rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là 6 cm.

Ví dụ 5 Tìm giao các tập nghiệm của hai bất phương trình sau:

$x^2 + 2x - 8 < 0$ (3) và $x^2 - 9 < 0$ (4)

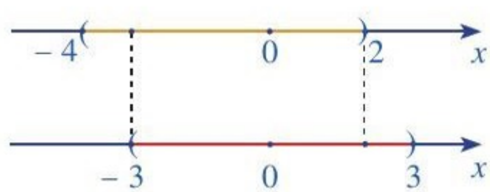
Giải

Ta có: (3) $\Leftrightarrow -4 < x < 2$. Tập nghiệm của bất phương trình (3) là $S_3 = (-4 ; 2)$;

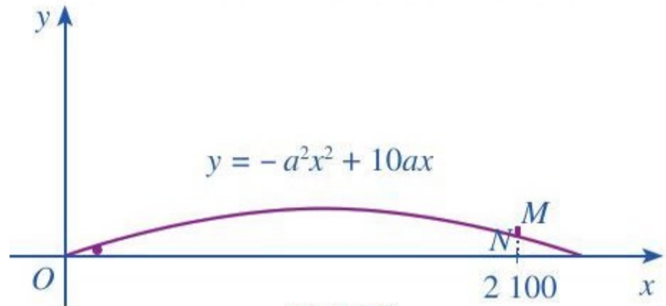
(4) $\Leftrightarrow -3 < x < 3$. Tập nghiệm của bất phương trình (4) là $S_4 = (-3 ; 3)$.

Giao các tập nghiệm của hai bất phương trình trên là:

$$S = S_3 \cap S_4 = (-4 ; 2) \cap (-3 ; 3) = (-3 ; 2).$$



Ví dụ 6 Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm $O(0\ ;\ 0)$ và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng MN với $M(2\,100\ ;\ 25)$ và $N(2\,100\ ;\ 15)$ (*Hình 29*). Xạ thủ cần xác định parabol $y = -a^2x^2 + 10ax$ $(a > 0)$ mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của a để xạ thủ đạt được mục đích trên.



Hình 29

Giải

Tại vị trí $x = 2\,100$, độ cao của viên đạn là:

$y = -a^2 \,.\, 2\,100^2 + 10a \,.\, 2\,100 = -4\,410\,000a^2 + 21\,000a.$

Viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi a thoả mãn các bất phương trình sau:

$2\,100 \le \dfrac{10}{a}$ (5); $-4\,410\,000a^2 + 21\,000a \le 25$ (6); $-4\,410\,000a^2 + 21\,000a \ge 15$ (7).

- (5) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a} \ge 210 \Leftrightarrow 0 < a \le \dfrac{1}{210}$. Tức là $a \in \left(0\ ;\ \dfrac{1}{210}\right]$.

- (6) $\Leftrightarrow 4\,410\,000a^2 - 21\,000a + 25 \ge 0$

  $\Leftrightarrow (2\,100a - 5)^2 \ge 0$. Bất phương trình này đúng $\forall a > 0$.

- (7) $\Leftrightarrow 4\,410\,000a^2 - 21\,000a + 15 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2\,100} \le a \le \dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2\,100}$

  $\Leftrightarrow a \in \left[\dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2\,100}\ ;\ \dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2\,100}\right]$.

Do $\dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2\,100} > 0$ và $\dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2\,100} < \dfrac{1}{210}$ nên

$$\left(0\ ;\ \frac{1}{210}\right] \cap \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2\,100}\ ;\ \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2\,100}\right] = \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2\,100}\ ;\ \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2\,100}\right].$$

Vì thế, viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi

$$a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2\,100}\ ;\ \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2\,100}\right].$$

Vậy giá trị lớn nhất của a là $\dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2\,100}$.

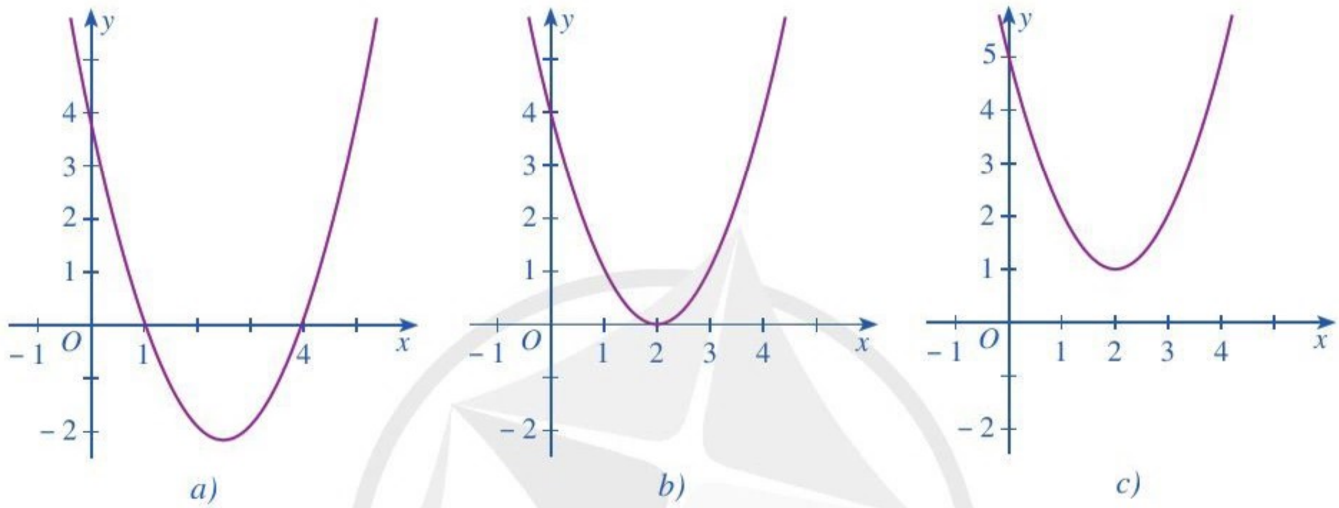
4 Tổng chi phí T (đơn vị tính: nghìn đồng) để sản xuất Q sản phẩm được cho bởi biểu thức $T = Q^2 + 30Q + 3\,300$; giá bán của 1 sản phẩm là 170 nghìn đồng. Số sản phẩm được sản xuất trong khoảng nào để đảm bảo không bị lỗ (giả thiết các sản phẩm được bán hết)?

BÀI TẬP

1. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc hai một ẩn? Vì sao?

a) $-2x + 2 < 0$;   b) $\frac{1}{2}y^2 - \sqrt{2}(y + 1) \leq 0$;   c) $y^2 + x^2 - 2x \geq 0$.

2. Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $y = f(x)$ trong mỗi *Hình 30a, 30b, 30c*, hãy viết tập nghiệm của mỗi bất phương trình sau: $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) \geq 0$; $f(x) \leq 0$.



Hình 30

3. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 - 5x + 3 > 0$;   b) $-x^2 - 2x + 8 \leq 0$;

c) $4x^2 - 12x + 9 < 0$;   d) $-3x^2 + 7x - 4 \geq 0$.

4. Tìm m để phương trình $2x^2 + (m + 1)x + m - 8 = 0$ có nghiệm.

5. Xét hệ toạ độ Oth trên mặt phẳng, trong đó trục Ot biểu thị thời gian t (tính bằng giây) và trục Oh biểu thị độ cao h (tính bằng mét). Một quả bóng được đá lên từ điểm $A(0 ; 0,2)$ và chuyển động theo quỹ đạo là một cung parabol. Quả bóng đạt độ cao 8,5 m sau 1 giây và đạt độ cao 6 m sau 2 giây.

a) Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị quỹ đạo chuyển động của quả bóng.

b) Trong khoảng thời gian nào thì quả bóng vẫn chưa chạm đất?

6. Công ty An Bình thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:

10 khách đầu tiên có giá là 800 000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 10 người đăng kí thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 10 000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

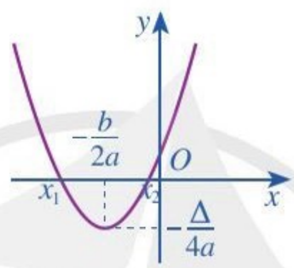
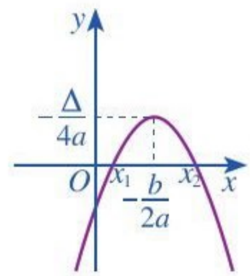
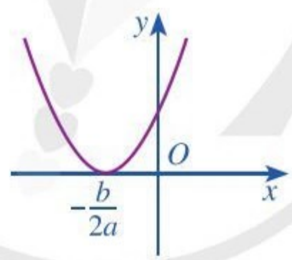
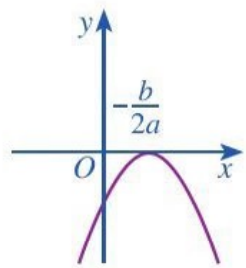
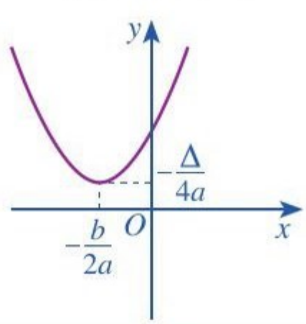
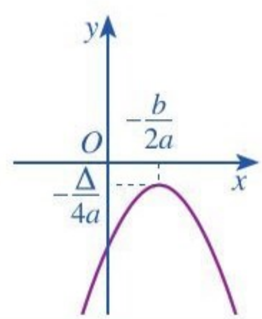
a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 11 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x.

b) Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 700 000 đồng/người.

TÌM HIỂU THÊM

Bảng dưới đây tổng kết các trường hợp có thể xảy ra khi giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ (*) ($a \neq 0$).

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

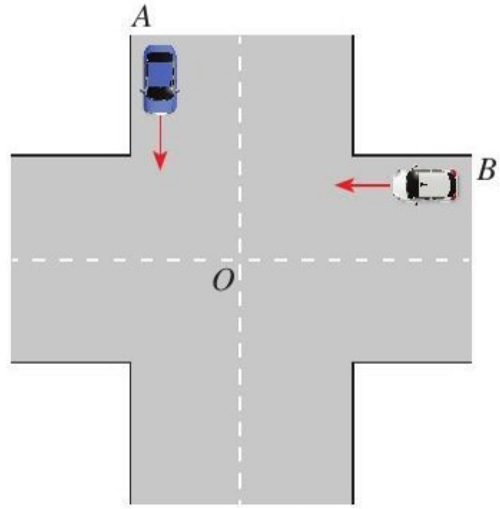
Dấu của a / Dấu của Δ	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$ $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)	(*) $\Leftrightarrow x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ 	(*) $\Leftrightarrow x \in (x_1; x_2)$ 
$\Delta = 0$ $f(x)$ có nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}$	(*) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$ 	(*) vô nghiệm 
$\Delta < 0$ $f(x)$ vô nghiệm	(*) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ 	(*) vô nghiệm 

Tương tự, em hãy lập bảng tổng kết các trường hợp có thể xảy ra khi giải các bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$ ($a \neq 0$).

§5 HAI DẠNG PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Hai ô tô xuất phát tại cùng một thời điểm với vận tốc trung bình như nhau là 40 km/h từ hai vị trí *A* và *B* trên hai con đường vuông góc với nhau để đi về bến *O* là giao của hai con đường. Vị trí *A* cách bến 8 km, vị trí *B* cách bến 7 km. Gọi *x* (giờ) là thời gian hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km (*Hình 31*).

Bạn Dương xác định được *x* thoả mãn phương trình $\sqrt{(8-40x)^2+(7-40x)^2}=5$.



Hình 31

Làm thế nào để tìm được giá trị của x?

I. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ (I)

($f(x)=ax^2+bx+c$ và $g(x)=mx^2+nx+p$ với $a\neq m$, a hoặc m có thể bằng 0)

Để giải phương trình (I), ta làm như sau:

Bước 1. Bình phương hai vế của (I) dẫn đến phương trình $f(x)=g(x)$ rồi tìm nghiệm của phương trình này.

Bước 2. Thay từng nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ vào bất phương trình $f(x)\geq 0$ (hoặc $g(x)\geq 0$). Nghiệm nào thoả mãn bất phương trình đó thì giữ lại, nghiệm nào không thoả mãn thì loại đi.

Bước 3. Trên cơ sở những nghiệm giữ lại ở *Bước 2*, ta kết luận nghiệm của phương trình (I).

Chú ý:

- Trong hai bất phương trình $f(x)\geq 0$ và $g(x)\geq 0$, ta thường chọn bất phương trình có dạng đơn giản hơn để thực hiện *Bước 2*.
- Người ta chứng minh được rằng tập hợp (số thực) giữ lại ở *Bước 2* chính là tập nghiệm của phương trình (I).

Ví dụ 1 Giải phương trình $\sqrt{x^2-6x-4}=\sqrt{x-4}$ (1).

Giải

Bình phương hai vế của (1) ta được $x^2-6x-4=x-4$ (2).

Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2-7x=0$.

Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 7$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x - 4 \geq 0$, ta thấy chỉ có $x = 7$ thoả mãn bất phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = 7$.

Ví dụ 2 Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 3x + 1} = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ (3).

Giải

Bình phương hai vế của (3) ta được $2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 4x + 3$ (4).

Ta có: (4) $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$.

Do đó, phương trình (4) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x^2 + 4x + 3 \geq 0$, ta thấy cả hai giá trị đều thoả mãn bất phương trình.

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

1 Giải phương trình:

$\sqrt{3x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 + x - 1}$.

II. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (II)

($f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = dx + e$ với $a \neq d^2$)

Để giải phương trình (II), ta làm như sau:

Bước 1. Giải bất phương trình $g(x) \geq 0$ để tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

Bước 2. Bình phương hai vế của (II) dẫn đến phương trình $f(x) = [g(x)]^2$ rồi tìm tập nghiệm của phương trình đó.

Bước 3. Trong những nghiệm của phương trình $f(x) = [g(x)]^2$, ta chỉ giữ lại những nghiệm thuộc tập nghiệm của bất phương trình $g(x) \geq 0$. Tập nghiệm giữ lại đó chính là tập nghiệm của phương trình (II).

Ví dụ 3 Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - 6x + 6} = 2x - 1 \text{ (5).}$$

Giải

Trước hết ta giải bất phương trình $2x - 1 \geq 0$ (6).

Ta có: (6) $\Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Bình phương hai vế của (5) ta được $x^2 - 6x + 6 = (2x - 1)^2$ (7).

Ta có: (7) $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0.$

Do đó, phương trình (7) có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = \dfrac{-5}{3}$.

Trong hai giá trị trên, chỉ có giá trị $x = 1$ là thoả mãn $x \geq \dfrac{1}{2}$.

Vậy phương trình (5) có nghiệm là $x = 1$.

> **2** Giải phương trình:
> $\sqrt{3x-5} = x - 1.$

Ví dụ 4 Trong bài toán ở phần mở đầu, hãy giải thích vì sao thời gian x (giờ) để hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km thoả mãn phương trình $\sqrt{(8-40x)^2+(7-40x)^2} = 5$. Sau đó, hãy giải phương trình trên.

Giải. (*Hình 32*)

Quãng đường xe ô tô xuất phát từ A, B đi được sau x giờ (với $x > 0$) là $40x$ (km).

Sau x giờ, ô tô xuất phát từ vị trí A đến C cách O một khoảng $OC = 8 - 40x$ (km).

Sau x giờ, ô tô xuất phát từ vị trí B đến D cách O một khoảng $OD = 7 - 40x$ (km).

Để $8 - 40x \geq 0$ và $7 - 40x \geq 0$ thì $0 \leq x \leq 0{,}175$. Do tam giác OCD là tam giác vuông nên $CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{(8-40x)^2+(7-40x)^2}$.

Ta có phương trình: $\sqrt{(8-40x)^2+(7-40x)^2} = 5$.

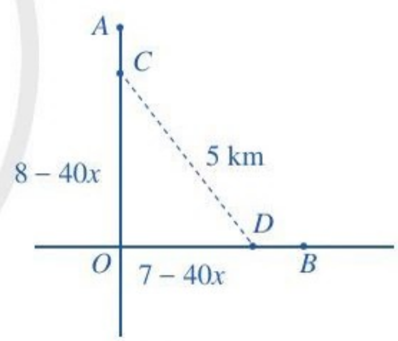
Bình phương hai vế ta có:

$$(8-40x)^2+(7-40x)^2 = 25.$$

$$\Leftrightarrow 1\,600x^2 - 640x + 64 + 1\,600x^2 - 560x + 49 = 25$$

$$\Leftrightarrow 3\,200x^2 - 1\,200x + 88 = 0$$

$$\Leftrightarrow 400x^2 - 150x + 11 = 0.$$



Hình 32

Phương trình có hai nghiệm là $x = 0{,}1$ hoặc $x = 0{,}275$. Đối chiếu với điều kiện $0 \leq x \leq 0{,}175$, ta chọn $x = 0{,}1$.

Vậy thời gian để hai xe cách nhau 5 km là 0,1 giờ.

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2 - 3x - 1} = \sqrt{2x + 3}$;

b) $\sqrt{4x^2 - 6x - 6} = \sqrt{x^2 - 6}$;

c) $\sqrt{x + 9} = 2x - 3$;

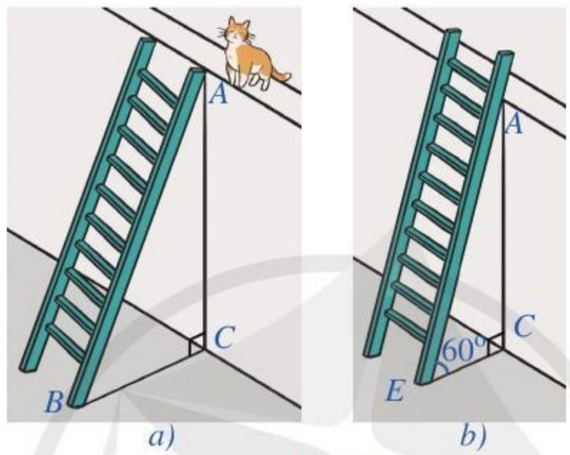
d) $\sqrt{-x^2 + 4x - 2} = 2 - x$.

2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2-x}+2x=3$;

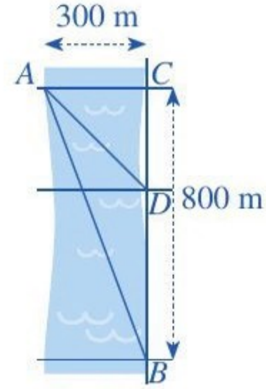
b) $\sqrt{-x^2+7x-6}+x=4$.

3. Để leo lên một bức tường, bác Nam dùng một chiếc thang có chiều dài cao hơn bức tường đó 1 m. Ban đầu, bác Nam đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó vừa chạm đúng vào mép trên bức tường (*Hình 33a*). Sau đó, bác Nam dịch chuyển chân thang vào gần chân tường thêm 0,5 m thì bác Nam nhận thấy thang tạo với mặt đất một góc 60° (*Hình 33b*). Hỏi bức tường cao bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



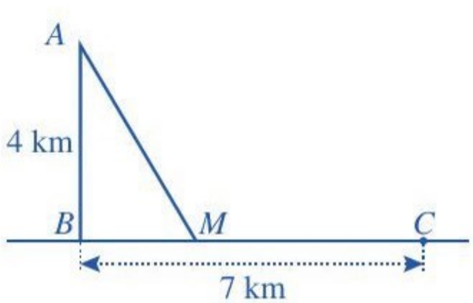
Hình 33

4. Một người đứng ở điểm *A* trên một bờ sông rộng 300 m, chèo thuyền đến vị trí *D*, sau đó chạy bộ đến vị trí *B* cách *C* một khoảng 800 m (*Hình 34*). Vận tốc chèo thuyền là 6 km/h, vận tốc chạy bộ là 10 km/h và giả sử vận tốc dòng nước không đáng kể. Tính khoảng cách từ vị trí *C* đến *D*, biết tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ từ *A* đến *B* (qua *D*) là 7,2 phút.

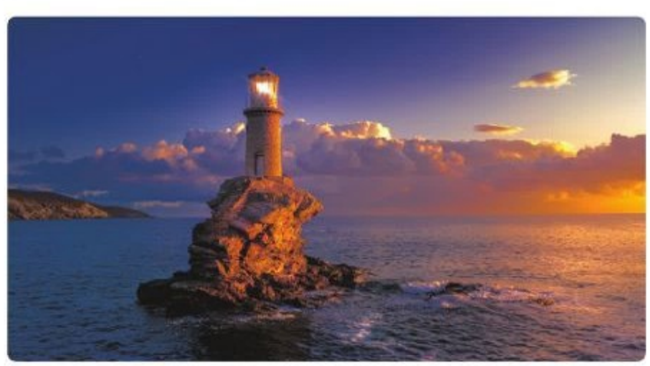


Hình 34

5. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí *A* cách bờ biển một khoảng cách $AB = 4$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí *C* cách *B* một khoảng là 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ *A* đến vị trí *M* trên bờ biển với vận tốc 3 km/h rồi đi bộ đến *C* với vận tốc 5 km/h (*Hình 35*). Tính khoảng cách từ vị trí *B* đến *M*, biết thời gian người đó đi từ *A* đến *C* (qua *M*) là 148 phút.



Hình 35



(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

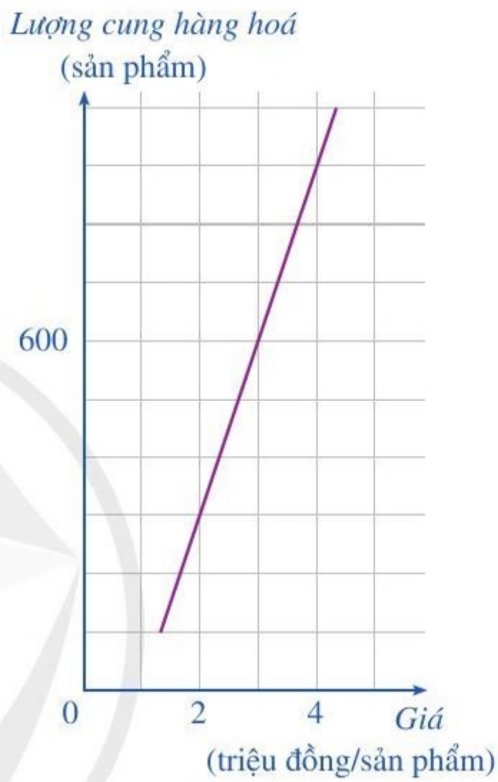
1. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$; b) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$.

2. Đồ thị ở *Hình 36* cho thấy sự phụ thuộc của lượng hàng hoá được sản xuất (cung) (đơn vị: sản phẩm) bởi giá bán (đơn vị: triệu đồng/sản phẩm) đối với một loại hàng hoá.

a) Xác định lượng hàng hoá được sản xuất khi mức giá bán 1 sản phẩm là 2 triệu đồng; 4 triệu đồng.

b) Biết nhu cầu thị trường đang cần là 600 sản phẩm. Hỏi với mức giá bán là bao nhiêu thì thị trường cân bằng (thị trường cân bằng khi sản lượng cung bằng sản lượng cầu)?



Hình 36

3. Một nhà cung cấp dịch vụ Internet đưa ra hai gói khuyến mại cho người dùng như sau:

Gói *A*: Giá cước 190 000 đồng/tháng.

Nếu trả tiền cước ngay 6 tháng thì sẽ được tặng thêm 1 tháng.

Nếu trả tiền cước ngay 12 tháng thì sẽ được tặng thêm 2 tháng.

Gói *B*: Giá cước 189 000 đồng/tháng.

Nếu trả tiền cước ngay 7 tháng thì số tiền phải trả cho 7 tháng đó là 1 134 000 đồng.

Nếu trả tiền cước ngay 15 tháng thì số tiền phải trả cho 15 tháng đó là 2 268 000 đồng.

Giả sử số tháng sử dụng Internet là x (x nguyên dương).

a) Hãy lập các hàm số thể hiện số tiền phải trả ít nhất theo mỗi gói *A*, *B* nếu thời gian dùng không quá 15 tháng.

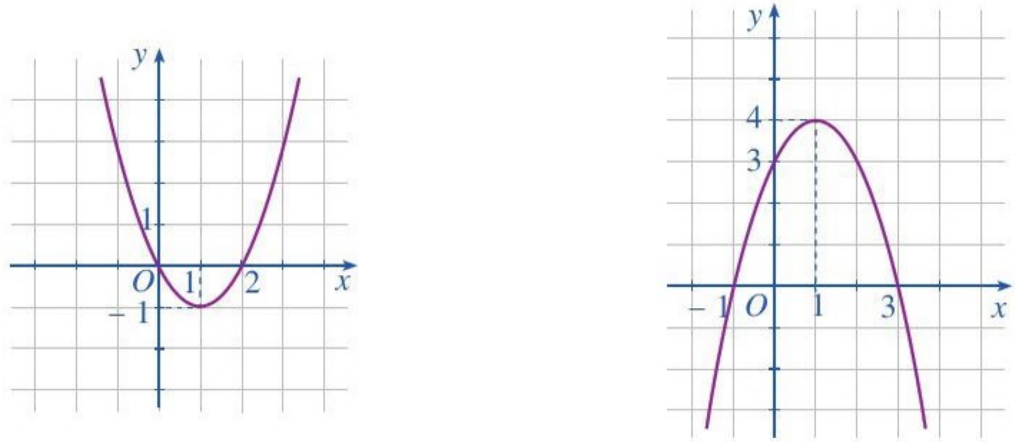
b) Nếu gia đình bạn Minh dùng 15 tháng thì nên chọn gói nào?

4. Quan sát đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ở mỗi *Hình 37a, 37b* rồi nêu:

a) Dấu của hệ số a; b) Toạ độ đỉnh và trục đối xứng;

c) Khoảng đồng biến; d) Khoảng nghịch biến;

e) Khoảng giá trị x mà $y > 0$; g) Khoảng giá trị x mà $y \leq 0$.



a) *b)*

Hình 37

5. Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

a) $y = x^2 - 3x - 4$; b) $y = x^2 + 2x + 1$; c) $y = -x^2 + 2x - 2$.

6. Lập bảng xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$; b) $f(x) = x^2 - x - 12$; c) $f(x) = 16x^2 + 24x + 9$.

7. Giải các bất phương trình sau:

a) $2x^2 + 3x + 1 \geq 0$; b) $-3x^2 + x + 1 > 0$;

c) $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$; d) $-16x^2 + 8x - 1 < 0$;

e) $2x^2 + x + 3 < 0$; g) $-3x^2 + 4x - 5 < 0$.

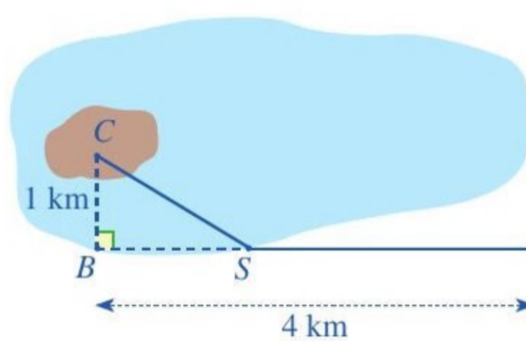
8. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x + 2} = x$;

b) $\sqrt{2x^2 + 3x - 2} = \sqrt{x^2 + x + 6}$;

c) $\sqrt{2x^2 + 3x - 1} = x + 3$.

9. Một kĩ sư thiết kế đường dây điện từ vị trí A đến vị trí S và từ vị trí S đến vị trí C trên cù lao như *Hình 38*. Tiền công thiết kế mỗi ki-lô-mét đường dây từ A đến S và từ S đến C lần lượt là 3 triệu đồng và 5 triệu đồng. Biết tổng số tiền công là 16 triệu đồng. Tính tổng số ki-lô-mét đường dây điện đã thiết kế.



Hình 38

CHƯƠNG IV
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC. VECTƠ

Trong chương này, chúng ta tìm hiểu những nội dung sau: giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°, định lí côsin và định lí sin trong tam giác, giải tam giác; vectơ, tổng và hiệu hai vectơ, tích của một số với một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ; ứng dụng vào giải các bài toán thực tiễn.

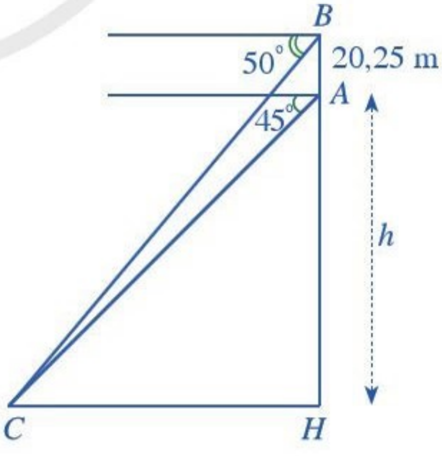
§1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°. ĐỊNH LÍ CÔSIN VÀ ĐỊNH LÍ SIN TRONG TAM GIÁC

Cột cờ Lũng Cú là cột cờ Quốc gia, nằm ở đỉnh Lũng Cú hay còn gọi là đỉnh núi Rồng (Long Sơn) thuộc xã Lũng Cú, huyện Đồng Văn, tỉnh Hà Giang, cách cực Bắc Việt Nam khoảng 3,3 km. Thời nhà Lý, cột cờ Lũng Cú chỉ được làm bằng cây sa mộc. Ngày nay, cột cờ có độ cao 33,15 m bao gồm bệ cột cao 20,25 m và cán cờ cao 12,9 m. Chân bệ cột cờ có 8 mặt phù điêu bằng đá xanh mô phỏng hoa văn mặt của trống đồng Đông Sơn và những hoạ tiết minh hoạ các giai đoạn qua từng thời kì lịch sử của đất nước, cũng như con người, tập quán của các dân tộc ở Hà Giang. Trên đỉnh cột là Quốc kì Việt Nam có diện tích 54 m^2, biểu tượng cho 54 dân tộc của đất nước ta.

(*Nguồn: http://baophutho.vn*)

Cột cờ Lũng Cú (Hà Giang)
(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Từ chân bệ cột cờ và đỉnh bệ cột cờ bạn Nam đo được góc nâng (so với phương nằm ngang) tới một vị trí dưới chân núi lần lượt là 45° và 50° (*Hình 1*).



Hình 1

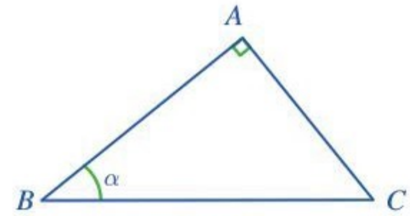
Chiều cao h của đỉnh Lũng Cú so với chân núi là bao nhiêu mét?

I. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

1 Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = \alpha$ (*Hình 2*).

a) Nhắc lại định nghĩa $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

b) Biểu diễn tỉ số lượng giác của góc $90^{o} - \alpha$ theo tỉ số lượng giác của góc α.



Hình 2

$\sin\alpha = \dfrac{AC}{BC}$, $\cos\alpha = \dfrac{AB}{BC}$, $\tan\alpha = \dfrac{AC}{AB}$, $\cot\alpha = \dfrac{AB}{AC}$.

$\sin(90^{o} - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^{o} - \alpha) = \sin\alpha$,

$\tan(90^{o} - \alpha) = \cot\alpha$, $\cot(90^{o} - \alpha) = \tan\alpha$.

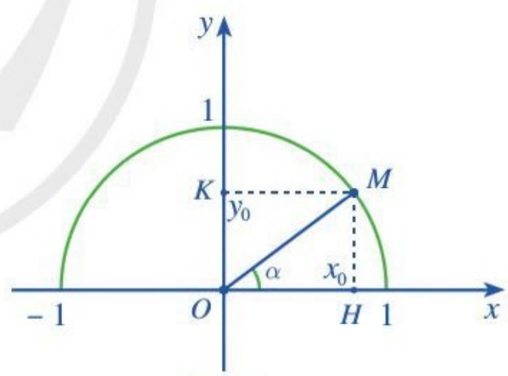
2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, nửa đường tròn tâm O nằm phía trên trục hoành bán kính $R = 1$ được gọi là *nửa đường tròn đơn vị* (*Hình 3*). Với mỗi góc nhọn α ta có thể xác định một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Giả sử điểm M có toạ độ $(x_0; y_0)$. Hãy tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ theo x_0, y_0.

Để tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ theo x_0, y_0, ta làm như sau:

Xét tam giác vuông OMH, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{MH}{OM} = \frac{y_0}{1} = y_0,\ \cos\alpha = \frac{OH}{OM} = \frac{x_0}{1} = x_0,$$

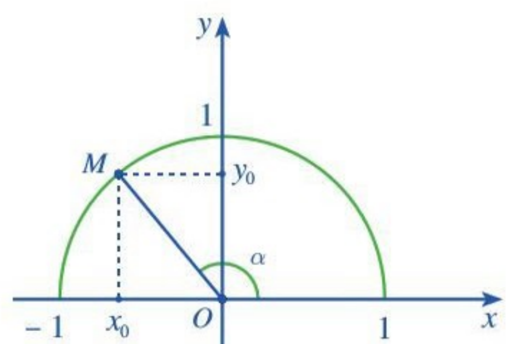
$$\tan\alpha = \frac{MH}{OH} = \frac{y_0}{x_0},\ \cot\alpha = \frac{OH}{MH} = \frac{x_0}{y_0}.$$



Hình 3

Mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác đối với góc nhọn cho những góc α từ 0^{o} đến 180^{o}, ta có định nghĩa sau đây:

Với mỗi góc α $(0^{o} \le \alpha \le 180^{o})$, ta xác định một điểm M $(x_0; y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ (*Hình 4*). Khi đó:



Hình 4

- sin của góc α, kí hiệu là $\sin\alpha$, được xác định bởi: $\sin\alpha = y_0$;
- côsin của góc α, kí hiệu là $\cos\alpha$, được xác định bởi: $\cos\alpha = x_0$;
- tang của góc α, kí hiệu là $\tan\alpha$, được xác định bởi: $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$ $(x_0 \neq 0)$;
- côtang của góc α, kí hiệu là $\cot\alpha$, được xác định bởi: $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}$ $(y_0 \neq 0)$.

Các số $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các *giá trị lượng giác* của góc α.

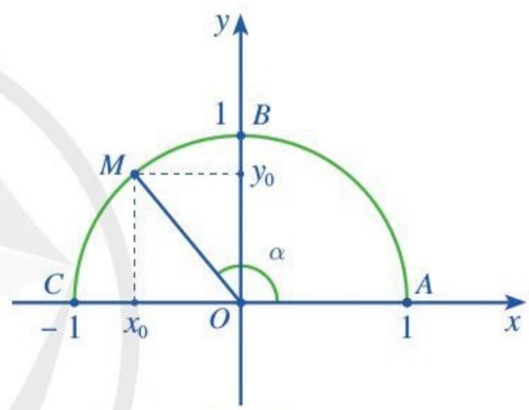
Ví dụ 1 Tính các giá trị lượng giác của các góc: 0°, 90°, 180°.

Giải. (*Hình 5*)

Với $\alpha = 0^\circ$: Khi đó, M trùng với $A(1; 0)$. Do đó $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\tan 0^\circ = 0$, $\cot 0^\circ$ không xác định.

Với $\alpha = 90^\circ$: Khi đó, M trùng với $B(0; 1)$. Do đó $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\tan 90^\circ$ không xác định, $\cot 90^\circ = 0$.

Với $\alpha = 180^\circ$: Khi đó, M trùng với $C(-1; 0)$. Do đó $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\tan 180^\circ = 0$, $\cot 180^\circ$ không xác định.



Hình 5

Chú ý

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\alpha \neq 90^\circ)$;

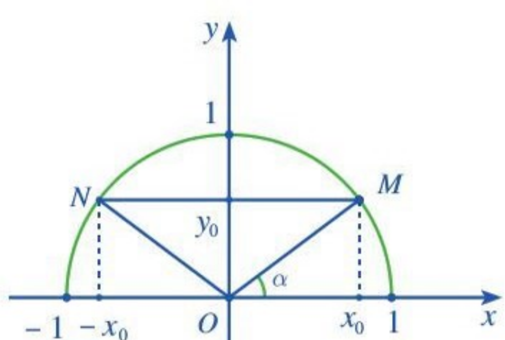
  $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(0 < \alpha < 180^\circ)$.
- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ $(0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$;

  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ $(0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$;

  $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha$ $(0^\circ < \alpha \leq 90^\circ)$;

  $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha$ $(0^\circ \leq \alpha < 90^\circ)$.

3 Trên nửa đường tròn đơn vị ta có dây cung MN song song với trục Ox và $\widehat{xOM} = \alpha$ (*Hình 6*).



Hình 6

a) Chứng minh $\widehat{xON} = 180^\circ - \alpha$.

b) Biểu diễn giá trị lượng giác của góc $180^\circ - \alpha$ theo giá trị lượng giác của góc α.

Với $0^o \le \alpha \le 180^o$ thì:

$$\sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha;$$
$$\cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha;$$
$$\tan(180^o - \alpha) = -\tan\alpha \ (\alpha \ne 90^o);$$
$$\cot(180^o - \alpha) = -\cot\alpha \ (\alpha \ne 0^o, \alpha \ne 180^o).$$

Ví dụ 2 Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức sau:

$$T = \cos 15^o - \sin 35^o + \cos 55^o + \cos 165^o - \cos 180^o.$$

Giải

$$T = \cos 15^o - \sin 35^o + \cos(90^o - 35^o) + \cos(180^o - 15^o) + 1$$
$$= \cos 15^o - \sin 35^o + \sin 35^o - \cos 15^o + 1 = 1.$$

Ví dụ 3 Viết giá trị lượng giác của góc 120^o.

Giải

Ta có: $\sin 120^o = \sin 60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad \cos 120^o = -\cos 60^o = -\dfrac{1}{2}$;

$\tan 120^o = -\tan 60^o = -\sqrt{3}$; $\quad \cot 120^o = -\cot 60^o = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Tương tự ta có bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt:

GTLG \ α	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	‖	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\alpha$	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	‖

Trong bảng, kí hiệu "‖" để chỉ giá trị lượng giác không xác định.

4 Ta có thể tìm giá trị lượng giác (đúng hoặc gần đúng) của một góc (từ 0^o đến 180^o) bằng cách sử dụng các phím: $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$, $\boxed{\tan}$ trên máy tính cầm tay.

Tính $\sin 75^o$, $\cos 175^o$, $\tan 64^o$ (làm tròn đến hàng phần chục nghìn).

Để tính các giá trị lượng giác trên, sau khi đưa máy tính về chế độ "độ" ta làm như sau:

	Nút ấn	**Kết quả**
$\sin 75^o$	$\boxed{\sin}\ \boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$	0.9659
$\cos 175^o$	$\boxed{\cos}\ \boxed{1}\ \boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$	– 0.9962
$\tan 64^o$	$\boxed{\tan}\ \boxed{6}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$	2.0503

5 Ta có thể tìm số đo (đúng hoặc gần đúng) của một góc từ 0^o đến 180^o khi biết giá trị lượng giác của góc đó bằng cách sử dụng các phím: $\boxed{\text{SHIFT}}$ cùng với $\boxed{\sin}$; $\boxed{\cos}$; $\boxed{\tan}$ trên máy tính cầm tay.

Tìm số đo góc α (từ 0^o đến 180^o) và làm tròn đến độ, biết:

a) $\cos\alpha = -0{,}97$; b) $\tan\alpha = 0{,}68$; c) $\sin\alpha = 0{,}45$.

Để tính gần đúng số đo góc α trong mỗi trường hợp trên, sau khi đưa máy tính về chế độ "độ", ta làm như sau:

	Nút ấn	**Kết quả**
$\cos\alpha = -0{,}97$	$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\cos}\ \boxed{-}\ \boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{9}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$	166^o
$\tan\alpha = 0{,}68$	$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\tan}\ \boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{6}\ \boxed{8}\ \boxed{=}$	34^o
$\sin\alpha = 0{,}45$	$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sin}\ \boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$	27^o

Chú ý: Khi tìm góc α ($0^o \le \alpha \le 180^o$) nếu đã biết $\sin\alpha$, trên máy tính chỉ hiện lên kết quả góc α trong khoảng từ 0^o đến 90^o. Giá trị còn lại cần tìm là $180^o - \alpha$.

Chẳng hạn trong hoạt động trên, giá trị còn lại cần tìm của α với $\sin\alpha = 0{,}45$ là khoảng $180^o - 27^o = 153^o$.

1 Hãy tính chiều cao h của đỉnh Lũng Cú so với chân núi trong bài toán ở phần mở đầu.

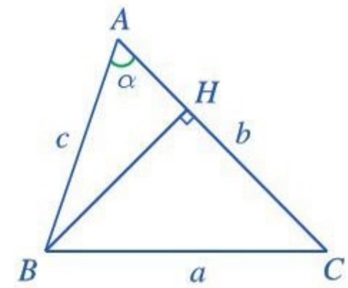
II. ĐỊNH LÍ CÔSIN

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Kẻ đường cao BH. Thực hiện các hoạt động sau:

6 Cho α là góc nhọn, chứng minh:

a) $HC = |AC - AH|$ và $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AH \,.\, AC$;

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.



Hình 7

Để chứng minh các đẳng thức trên, ta làm như sau:

a) Nếu góc C nhọn thì H nằm giữa A và C. Do đó

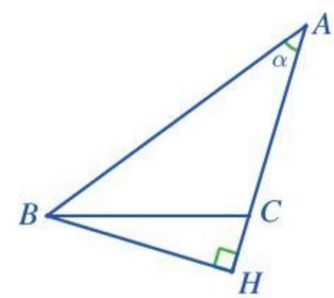
$HC = AC - AH = |AC - AH|$ (*Hình 7*).

Nếu góc C tù thì C nằm giữa A và H. Do đó

$HC = AH - AC = |AC - AH|$ (*Hình 8*).

Nếu góc C vuông thì C trùng với H. Do đó

$HC = 0 = |AC - AH|$.



Hình 8

Trong mọi trường hợp, ta đều có $HC = |AC - AH|$.

Xét các tam giác vuông BHC và AHB, áp dụng định lí Pythagore, ta có:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 = BH^2 + (AC - AH)^2 = (BH^2 + AH^2) + AC^2 - 2AH \,.\, AC$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AH \,.\, AC.$$

b) Xét tam giác vuông AHB, ta có: $AH = AB\cos A = c\cos\alpha$.

Do đó $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AH \,.\, AC = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Vậy $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

7 Cho α là góc tù. Chứng minh:

a) $HC = AC + AH$ và $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AH \,.\, AC$;

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

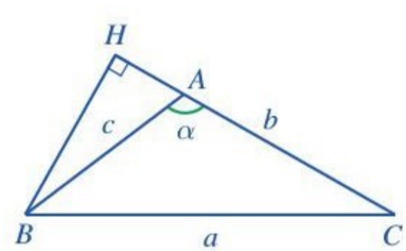
Để chứng minh các đẳng thức trên, ta làm như sau:

a) (*Hình 9*). Xét các tam giác vuông BHC và AHB, áp dụng định lí Pythagore, ta có:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 = BH^2 + (AC + AH)^2$$

$$= (BH^2 + AH^2) + AC^2 + 2AH \,.\, AC$$

$$= AB^2 + AC^2 + 2AH \,.\, AC.$$



Hình 9

b) Xét tam giác vuông AHB, ta có:

$AH = AB\cos(180^{\circ} - \alpha) = -c\cos\alpha$.

Do đó $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AH \,.\, AC = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Vậy $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

8 Cho α là góc vuông. Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Như vậy, trong tam giác ABC tuỳ ý ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có định lí côsin sau đây:

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Khi đó:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

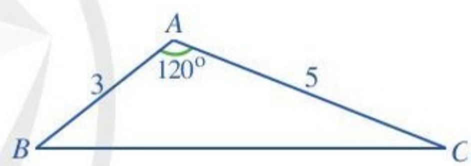
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 5$ và $\widehat{A} = 120^{\circ}$ (*Hình 10*).

a) Tính $\cos A$.

b) Tính độ dài cạnh BC.



Hình 10

Giải

a) Ta có: $\cos A = \cos 120^{\circ} = -\cos 60^{\circ} = -\dfrac{1}{2}$.

b) Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \,.\, AC \,.\, \cos A$.

Thay số ta có:

$$BC^2 = 3^2 + 5^2 - 2\,.\,3\,.\,5\,.\left(-\frac{1}{2}\right) = 49.$$

Do đó $BC = \sqrt{49} = 7$.

2 Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 6$, $BC = 7$. Tính $\cos A$.

Ví dụ 5 Hai máy bay cùng xuất phát từ một sân bay A và bay theo hai hướng khác nhau, tạo với nhau góc 60°. Máy bay thứ nhất bay với vận tốc 650 km/h, máy bay thứ hai bay với vận tốc 900 km/h. Sau 2 giờ, hai máy bay cách nhau bao nhiêu ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết rằng cả hai máy bay bay theo đường thẳng và sau 2 giờ bay đều chưa hạ cánh.

Giải

Giả sử sau 2 giờ, máy bay thứ nhất đến vị trí B, máy bay thứ hai đến vị trí C.

Ta có: $AB = 2 \,.\, 650 = 1\,300$ (km), $AC = 2 \,.\, 900 = 1\,800$ (km),

$\widehat{BAC} = 60^{\circ}$ (*Hình 11*).

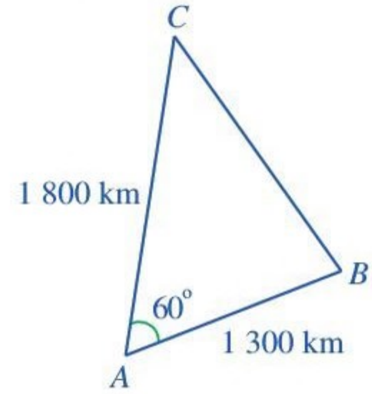
Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \,.\, AC \,.\, \cos\widehat{BAC}$$

$$= 1\,300^2 + 1\,800^2 - 2 \,.\, 1\,300 \,.\, 1\,800 \,.\, \cos 60^{\circ} = 2\,590\,000.$$

Do đó $BC \approx 1\,609{,}35$ (km).

Vậy sau 2 giờ hai máy bay cách nhau khoảng 1 609,35 km.



Hình 11

III. ĐỊNH LÍ SIN

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R và có $BC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Thực hiện các hoạt động sau:

9 Cho α là góc nhọn. Chứng minh:

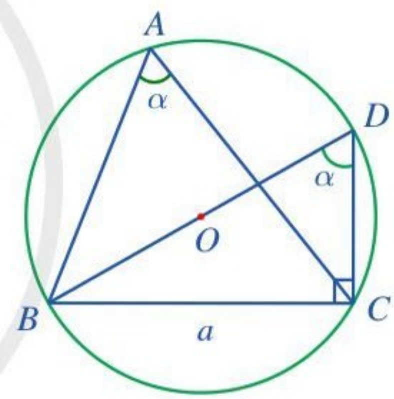
a) $\widehat{BDC} = \alpha$; b) $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

Để chứng minh đẳng thức ở câu b, ta làm như sau (*Hình 12*):

Xét tam giác BDC, ta có $\widehat{BDC} = \alpha$.

Vì BD là đường kính của đường tròn (O) nên $\widehat{BCD} = 90^{\circ}$.

Do đó $\sin D = \dfrac{BC}{BD}$, tức là $\sin a = \dfrac{a}{2R}$ hay $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.



Hình 12

10 Cho α là góc tù. Chứng minh:

a) $\widehat{BDC} = 180^{\circ} - \alpha$; b) $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

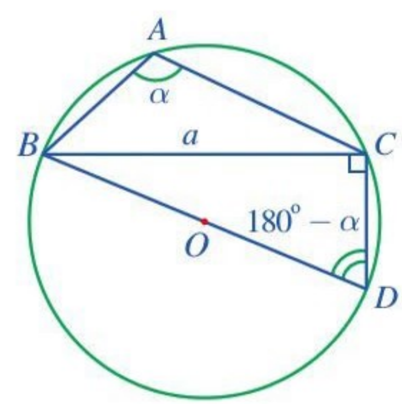
Để chứng minh đẳng thức ở câu b, ta làm như sau (*Hình 13*):

Xét tam giác BCD, ta có:

$\widehat{BDC} = 180^{\circ} - \alpha$ và $\widehat{BCD} = 90^{\circ}$.

Do đó $\sin D = \dfrac{BC}{BD}$, tức là $\sin(180^{\circ} - \alpha) = \dfrac{a}{2R}$.

Mà $\sin(180^{\circ} - \alpha) = \sin\alpha$ nên $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$ hay $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.



Hình 13

11 Cho α là góc vuông. Chứng minh: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

Như vậy, trong tam giác ABC tuỳ ý ta có: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có định lí sin sau đây:

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Khi đó:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

$a = 2R\sin A$,

$b = 2R\sin B$,

$c = 2R\sin C$.

Ví dụ 6 Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^o$, $\widehat{B} = 45^o$ và $CA = 20$ (*Hình 14*). Tính:

a) $\sin A$;

b) Độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Giải

a) Ta có: $\sin A = \sin 120^o = \sin 60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

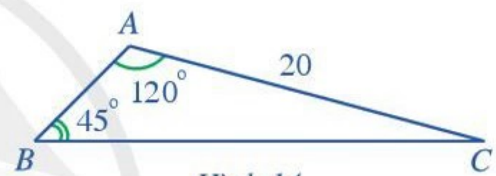
b) Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = 2R.$$

Do đó

$$BC = \frac{CA\,.\,\sin A}{\sin B} = \frac{20\,.\,\sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} = 10\sqrt{6};$$

$$R = \frac{CA}{2\,.\,\sin B} = \frac{20}{2\,.\,\sin 45^\circ} = 10\sqrt{2}.$$



Hình 14

3 Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có bán kính $R = 6$ và có các góc $\widehat{B} = 65^o$, $\widehat{C} = 85^o$. Tính độ dài cạnh BC.

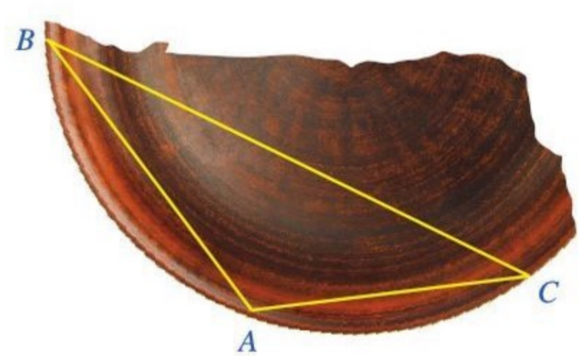
Ví dụ 7 Các nhà khảo cổ học tìm được một mảnh chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ. Để xác định đường kính của chiếc đĩa, họ lấy ba điểm trên vành đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như sau: $BC \approx 28{,}5$ cm, $\widehat{BAC} \approx 120^o$ (*Hình 15*). Tính đường kính của chiếc đĩa theo đơn vị xăng-ti-mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Giải

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có:

$$2R = \frac{BC}{\sin A} \approx \frac{28{,}5}{\sin 120^o} \approx 33 \text{ (cm)}.$$

Vậy đường kính của chiếc đĩa khoảng 33 cm.



Hình 15

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC có $AB = 3{,}5$; $AC = 7{,}5$; $\widehat{A} = 135^{\circ}$. Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

2. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 75^{\circ}$, $\widehat{C} = 45^{\circ}$ và $BC = 50$. Tính độ dài cạnh AB.

3. Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $AC = 7$, $BC = 8$. Tính $\cos A$, $\sin A$ và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

4. Tính giá trị của các biểu thức sau (không dùng máy tính cầm tay):

a) $A = \cos 0^{\circ} + \cos 40^{\circ} + \cos 120^{\circ} + \cos 140^{\circ}$;

b) $B = \sin 5^{\circ} + \sin 150^{\circ} - \sin 175^{\circ} + \sin 180^{\circ}$;

c) $C = \cos 15^{\circ} + \cos 35^{\circ} - \sin 75^{\circ} - \sin 55^{\circ}$;

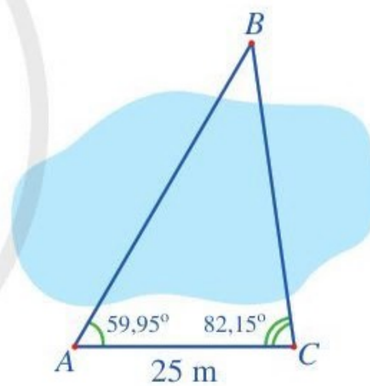
d) $D = \tan 25^{\circ} \cdot \tan 45^{\circ} \cdot \tan 115^{\circ}$;

e) $E = \cot 10^{\circ} \cdot \cot 30^{\circ} \cdot \cot 100^{\circ}$.

5. Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a) $\sin\dfrac{A}{2} = \cos\dfrac{B+C}{2}$; b) $\tan\dfrac{B+C}{2} = \cot\dfrac{A}{2}$.

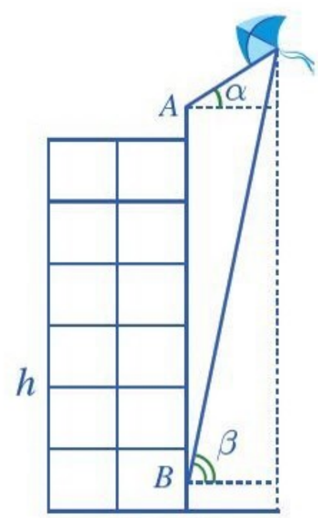
6. Để đo khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B ở hai bên bờ một cái ao, bạn An đi dọc bờ ao từ vị trí A đến vị trí C và tiến hành đo các góc BAC, BCA. Biết $AC = 25$ m, $\widehat{BAC} = 59{,}95^{\circ}$, $\widehat{BCA} = 82{,}15^{\circ}$ (*Hình 16*). Hỏi khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 16

7. Hai tàu đánh cá cùng xuất phát từ bến A và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc 75°. Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 8 hải lí một giờ và tàu thứ hai chạy với tốc độ 12 hải lí một giờ. Sau 2,5 giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là bao nhiêu hải lí (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

8. Bạn A đứng ở nóc của toà nhà và quan sát chiếc diều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của bạn A tới chiếc diều và phương nằm ngang) là $\alpha = 35^{\circ}$; khoảng cách từ nóc toà nhà tới mắt bạn A là 1,5 m. Cùng lúc đó ở dưới chân toà nhà, bạn B cũng quan sát chiếc diều và thấy góc nâng là $\beta = 75^{\circ}$; khoảng cách từ mặt đất đến mắt bạn B cũng là 1,5 m. Biết chiều cao của toà nhà là $h = 20$ m (*Hình 17*). Chiếc diều bay cao bao nhiêu mét so với mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

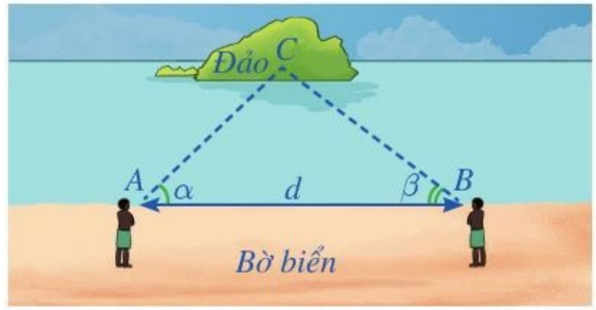


Hình 17

§2 GIẢI TAM GIÁC

Từ xa xưa, con người đã cần đo đạc các khoảng cách mà không thể đo trực tiếp được. Chẳng hạn, để đo khoảng cách từ vị trí A trên bờ biển tới một hòn đảo (hay con tàu, ...) trên biển, người xưa đã tìm ra một cách đo khoảng cách đó như sau:

Từ vị trí A, đo góc nghiêng α so với bờ biển tới một vị trí C quan sát được trên đảo. Sau đó di chuyển dọc bờ biển đến vị trí B cách A một khoảng d và tiếp tục đo góc nghiêng β so với bờ biển tới vị trí C đã chọn (*Hình 18*). Bằng cách giải tam giác ABC, họ tính được khoảng cách AC.



Hình 18

Giải tam giác được hiểu như thế nào?

I. TÍNH CÁC CẠNH VÀ GÓC CỦA TAM GIÁC DỰA TRÊN MỘT SỐ ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Như ta đã biết, một tam giác hoàn toàn xác định nếu biết một trong những dữ kiện sau:

– Biết độ dài hai cạnh và độ lớn góc xen giữa hai cạnh đó;

– Biết độ dài ba cạnh;

– Biết độ dài một cạnh và độ lớn hai góc kề với cạnh đó.

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên những dữ kiện cho trước.

1 Cho tam giác ABC có $AB = c, AC = b, \widehat{A} = \alpha$. Viết công thức tính BC theo b, c, α.

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC có $AB = 15, AC = 35, \widehat{A} = 60^\circ$ (*Hình 19*). Tính cạnh BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) và góc B (làm tròn kết quả đến độ).

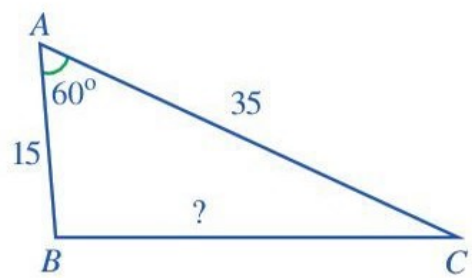
Giải

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \,.\, AB \,.\, AC \,.\, \cos A$$

$$= 15^2 + 35^2 - 2 \,.\, 15 \,.\, 35 \,.\, \cos 60^\circ = 925.$$

Do đó $BC = \sqrt{925} \approx 30{,}4$.



Hình 19

Ta có: $\cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \,.\, AB \,.\, BC} = \dfrac{15^2 + 925 - 35^2}{2 \,.\, 15 \,.\, \sqrt{925}}$.

Do đó $\widehat{B} \approx 95^\circ$.

2 Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Viết công thức tính $\cos A$ theo a, b, c.

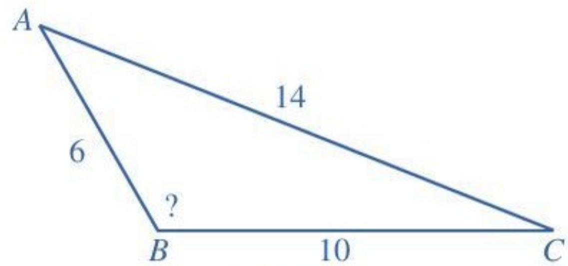
Ví dụ 2 Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $BC = 10$, $CA = 14$ (*Hình 20*). Tính số đo góc B.

Giải

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC, ta có:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \,.\, AB \,.\, BC} = \frac{6^2 + 10^2 - 14^2}{2 \,.\, 6 \,.\, 10} = -0{,}5.$$

Do đó $\widehat{B} = 120^\circ$.



Hình 20

3 Viết công thức định lí sin cho tam giác ABC.

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC có $BC = 100$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$ (*Hình 21*). Tính góc A và các cạnh AB, AC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) của tam giác đó.

Giải

Ta có:

$$\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ.$$

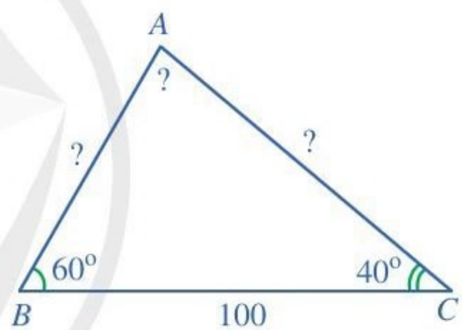
Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}.$$

Do đó

$$AB = \frac{BC \,.\, \sin C}{\sin A} = \frac{100 \,.\, \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 65{,}3;$$

$$AC = \frac{BC \,.\, \sin B}{\sin A} = \frac{100 \,.\, \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 87{,}9.$$



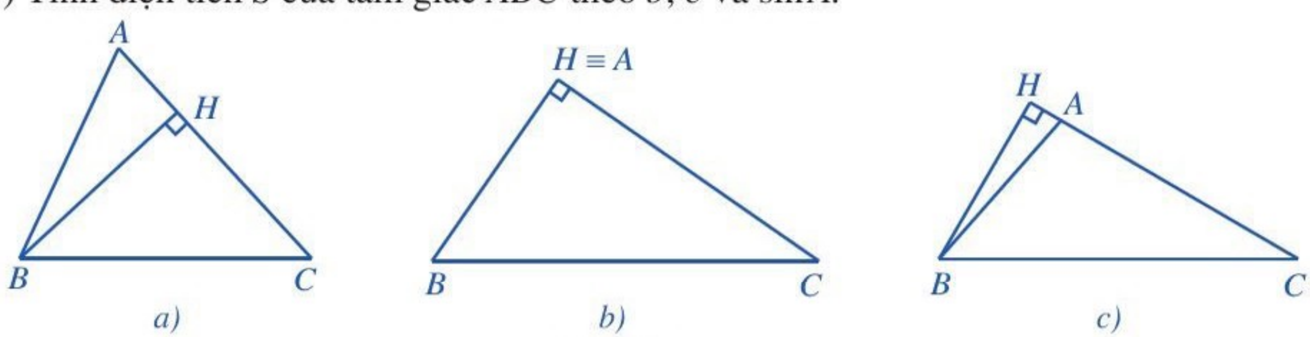
Hình 21

II. TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

4 Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Kẻ đường cao BH.

a) Tính BH theo c và $\sin A$.

b) Tính diện tích S của tam giác ABC theo b, c và $\sin A$.



Hình 22

Để tính độ dài BH và diện tích tam giác ABC, ta làm như sau:

a) Xét các trường hợp:

Với $\widehat{A} < 90^{\circ}$ (*Hình 22a*). Xét tam giác vuông AHB, ta có: $BH = AB.\sin A = c\sin A$.

Với $\widehat{A} = 90^{\circ}$ (*Hình 22b*). Khi đó, $BH = BA = c = c\sin A$.

Với $\widehat{A} > 90^{\circ}$ (*Hình 22c*). Xét tam giác vuông AHB, ta có: $\widehat{BAH} = 180^{\circ} - \widehat{A}$.

Do đó $BH = AB.\sin(180^{\circ} - \widehat{A}) = AB.\sin A = c\sin A$.

Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều có $BH = c\sin A$.

b) Ta có:

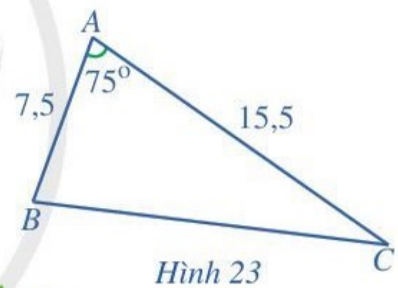
$$S = \frac{1}{2}AC.BH = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có công thức tính diện tích tam giác như sau:

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC có $AB = 7,5$; $AC = 15,5$; $\widehat{A} = 75^{\circ}$ (*Hình 23*). Tính diện tích S của tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 23

Giải

Ta có: $S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$

$= \frac{1}{2}.7,5.15,5.\sin 75^{\circ}$

$\approx 56,1.$

1 Cho tam giác ABC có $AB = 12$; $\widehat{B} = 60^{\circ}$; $\widehat{C} = 45^{\circ}$. Tính diện tích của tam giác ABC.

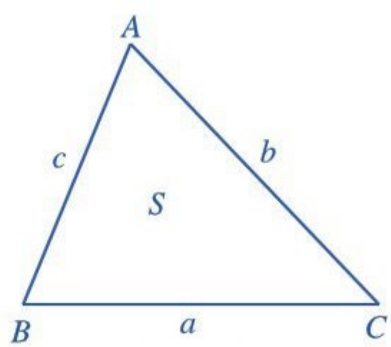
5 Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và diện tích là S (*Hình 24*).

a) Từ định lí côsin, chứng tỏ rằng:

$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ở đó $p = \frac{a+b+c}{2}$.

b) Bằng cách sử dụng công thức $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, hãy chứng tỏ rằng:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$



Hình 24

Ta có công thức Heron để tính diện tích tam giác theo độ dài ba cạnh của nó như sau:

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ví dụ 5 Mảnh vườn hình tam giác của gia đình bạn Nam có chiều dài các cạnh là $MN = 20$ m, $NP = 28$ m, $MP = 32$ m (*Hình 25*). Hỏi diện tích mảnh vườn của gia đình bạn Nam là bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng phần mười)?

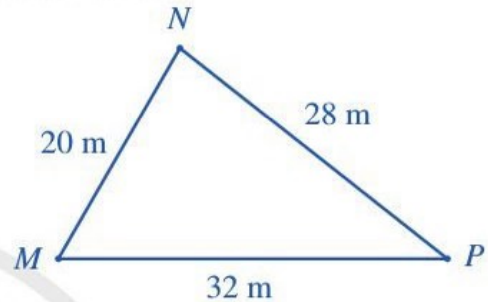
Giải

Ta có: $p = \dfrac{20+28+32}{2} = 40$ (m).

Diện tích mảnh vườn là:

$$S = \sqrt{40(40-20)(40-28)(40-32)}$$

$$\approx 277{,}1 \text{ (m}^2\text{)}.$$

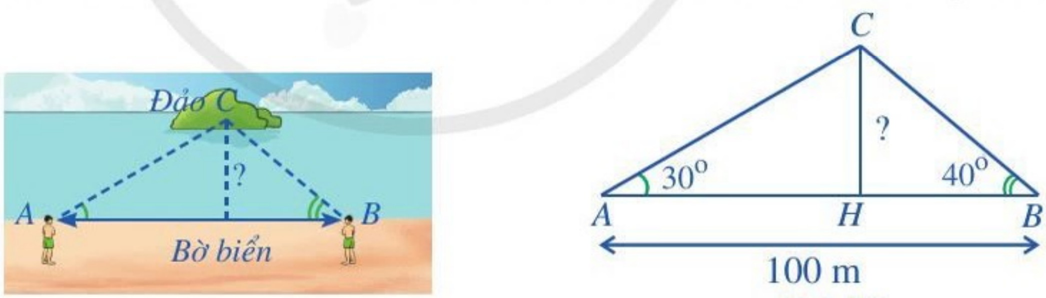


Hình 25

III. ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Ví dụ 6 Đứng ở vị trí A trên bờ biển, bạn Minh đo được góc nghiêng so với bờ biển tới một vị trí C trên đảo là 30°. Sau đó di chuyển dọc bờ biển đến vị trí B cách A một khoảng 100 m và đo được góc nghiêng so với bờ biển tới vị trí C đã chọn là 40°.

Tính khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 26

Giải

Xét tam giác ABC (*Hình 26*), ta có: $\widehat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 110^\circ$.

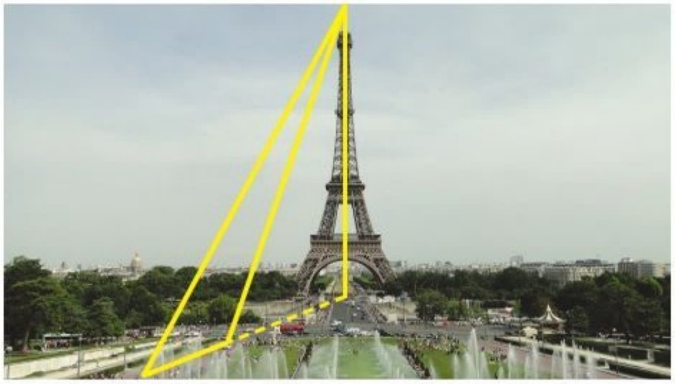
Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có: $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$.

Do đó $AC = \dfrac{AB\,.\,\sin B}{\sin C} = \dfrac{100\,.\,\sin 40^\circ}{\sin 110^\circ} \approx 68{,}4$ (m).

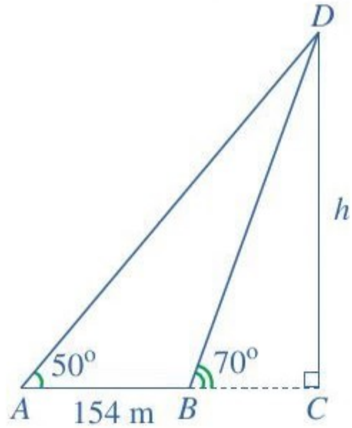
Xét tam giác vuông AHC, ta có: $CH = AC\,.\,\sin 30^\circ \approx 68{,}4\,.\,0{,}5 \approx 34{,}2$ (m).

Vậy khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển khoảng 34,2 m.

Ví dụ 7 Trong lần đến tham quan tháp Eiffel (ở Thủ đô Paris, Pháp), bạn Phương muốn ước tính độ cao của tháp. Sau khi quan sát, bạn Phương đã minh hoạ lại kết quả đo đạc ở *Hình 27*. Em hãy giúp bạn Phương tính độ cao h của tháp Eiffel theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



(Nguồn: https://pixabay.com)



Hình 27

Giải

Xét tam giác ABD, sử dụng tính chất góc ngoài, ta có:

$\widehat{ADB} = 70^\circ - 50^\circ = 20^\circ$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABD, ta có:

$$\frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ADB}}.$$

Do đó $BD = \dfrac{154 \, . \, \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 345$ (m).

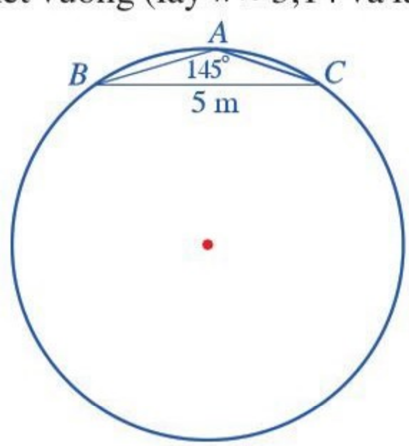
Xét tam giác vuông BCD, ta có:

$$CD = BD \, . \, \sin \widehat{CBD} \approx 345 \, . \, \sin 70^\circ \approx 324 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao h của tháp Eiffel khoảng 324 m.

2 Từ trên nóc của một toà nhà cao 18,5 m, bạn Nam quan sát một cái cây cách toà nhà 30 m và dùng giác kế đo được góc lệch giữa phương quan sát gốc cây và phương nằm ngang là 34°, góc lệch giữa phương quan sát ngọn cây và phương nằm ngang là 24°. Biết chiều cao của chân giác kế là 1,5 m. Chiều cao của cái cây là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Ví dụ 8 Để tính đường kính và diện tích của một giếng nước có dạng hình tròn, người ta tiến hành đo đạc tại ba vị trí A, B, C trên thành giếng. Kết quả đo được là: $BC = 5$ m, $\widehat{BAC} = 145^\circ$ (*Hình 28*). Diện tích của giếng là bao nhiêu mét vuông (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 28

Giải

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC, ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R$.

Do đó $R = \dfrac{BC}{2 \,.\, \sin A} = \dfrac{5}{2 \,.\, \sin 145^\circ} \approx 4{,}36$ (m).

Vậy diện tích của giếng là: $S = \pi R^2 \approx 3{,}14 \,.\, 4{,}36^2 \approx 59{,}69$ (m^2).

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC có $BC = 12$, $CA = 15$, $\widehat{C} = 120^\circ$. Tính:

a) Độ dài cạnh AB; b) Số đo các góc A, B; c) Diện tích tam giác ABC.

2. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $\widehat{A} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh AC.

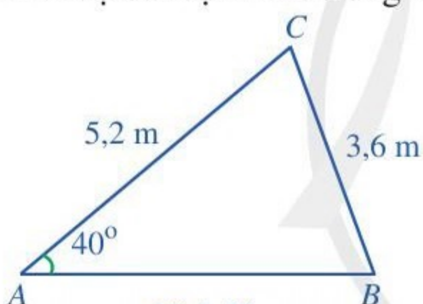
3. Cho tam giác ABC có $AB = 100$, $\widehat{B} = 100^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính:

a) Độ dài các cạnh AC, BC; b) Diện tích tam giác ABC.

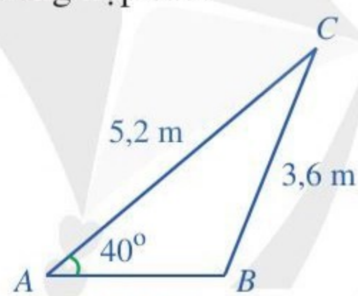
4. Cho tam giác ABC có $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 20$. Tính:

a) Số đo các góc A, B, C; b) Diện tích tam giác ABC.

5. Tính độ dài cạnh AB trong mỗi trường hợp sau:

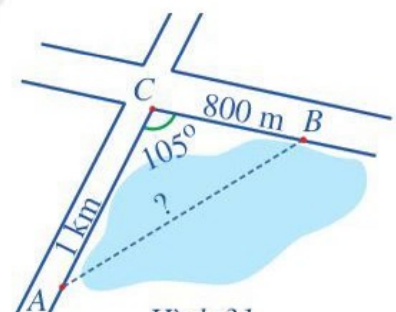


Hình 29



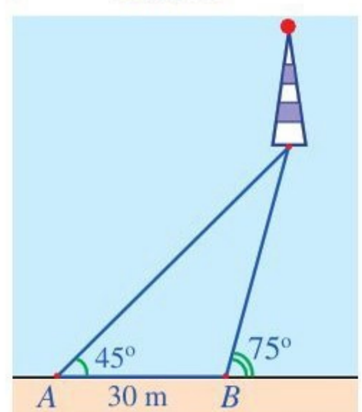
Hình 30

6. Để tính khoảng cách giữa hai địa điểm A và B mà ta không thể đi trực tiếp từ A đến B (hai địa điểm nằm ở hai bên bờ một hồ nước, một đầm lầy, ...), người ta tiến hành như sau: Chọn một địa điểm C sao cho ta đo được các khoảng cách AC, CB và góc ACB. Sau khi đo, ta nhận được: $AC = 1$ km, $CB = 800$ m và $\widehat{ACB} = 105^\circ$ (*Hình 31*). Tính khoảng cách AB (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét).



Hình 31

7. Một người đi dọc bờ biển từ vị trí A đến vị trí B và quan sát một ngọn hải đăng. Góc nghiêng của phương quan sát từ các vị trí A, B tới ngọn hải đăng với đường đi của người quan sát là 45° và 75°. Biết khoảng cách giữa hai vị trí A, B là 30 m (*Hình 32*). Ngọn hải đăng cách bờ biển bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 32

TÌM HIỂU THÊM

Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Gọi R, r, p và S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp, nửa chu vi và diện tích của tam giác ABC.

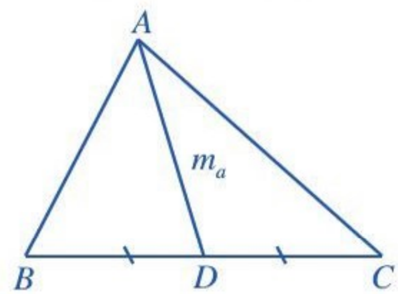
1. Công thức độ dài đường trung tuyến

Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến lần lượt xuất phát từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Ta có:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4},$$

$$m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4},$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$



Hình 33

Chứng minh

Gọi D là trung điểm của BC (*Hình 33*), ta có:

$$AD = m_a,\ BD = DC = \frac{a}{2}.$$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABD, ta có:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \,.\, BD \,.\, \cos\widehat{ABD} = c^2 + \frac{a^2}{4} - ca\cos B.$$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC, ta có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Suy ra $$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4},\quad m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

2. Công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

Ta có hai công thức sau:

$$r = \frac{S}{p},\qquad R = \frac{abc}{4S}.$$

Em hãy chứng minh các công thức trên.

§3 KHÁI NIỆM VECTƠ

(*Nguồn: https://pixabay.com*)

Hình 34

Mũi tên xuất phát từ A đến B trong *Hình 34* mô tả chuyển động (có hướng) của một máy bay trên đường băng.

Đoạn thẳng AB có hướng được gọi là gì?

I. KHÁI NIỆM VECTƠ

1 Trong công viên, để chỉ dẫn hướng đi và khoảng cách từ cổng đến khu vui chơi của trẻ em, người ta vẽ đoạn thẳng có mũi tên như ở *Hình 35*. Hình ảnh về mũi tên chỉ dẫn cho biết những thông tin gì?

Hình 35

Trên Hình 35, ta có:

- *Hướng quy định trên đoạn thẳng AB là hướng xuất phát từ điểm đầu A đến điểm cuối B;*
- *Đoạn thẳng AB có độ dài bằng* 200 m.

> *Vectơ* là một đoạn thẳng có hướng.

Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ AB".

Để vẽ vectơ $\overrightarrow{AB}$ ta vẽ đoạn thẳng AB và đánh dấu mũi tên ở đầu mút B (*Hình 36*).

Hình 36

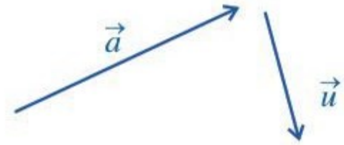
Đối với vectơ $\overrightarrow{AB}$, ta gọi:

– Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B là *giá* của vectơ $\overrightarrow{AB}$ (*Hình 37*);

Hình 37

– Độ dài đoạn thẳng AB là *độ dài* của vectơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$.

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}$, ... (*Hình 38*). Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.



Hình 38

Ví dụ 1 Cho hai điểm phân biệt H, K. Viết các vectơ (có điểm đầu khác điểm cuối) mà hai đầu mút của mỗi vectơ là hai điểm đã cho.

Giải. Hai vectơ thoả mãn yêu cầu đề bài là $\overrightarrow{HK}$ và $\overrightarrow{KH}$.

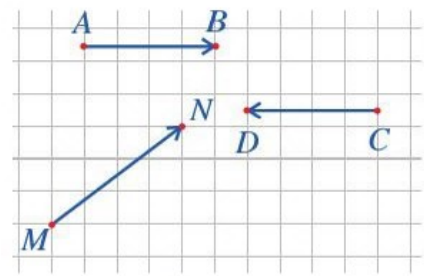
1 Cho tam giác ABC. Viết tất cả các vectơ mà điểm đầu và điểm cuối là A, B hoặc C.

Ví dụ 2 Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MN}$ ở *Hình 39*, biết rằng độ dài cạnh của ô vuông bằng 1 cm.

Giải

$$|\overrightarrow{AB}| = 4 \text{ cm}, |\overrightarrow{CD}| = 4 \text{ cm},$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (cm)}.$$

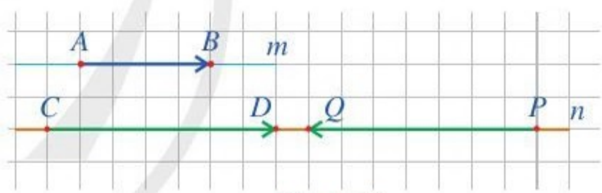


Hình 39

II. VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, VECTƠ CÙNG HƯỚNG

2 Quan sát *Hình 40* và cho biết vị trí tương đối giữa giá của vectơ $\overrightarrow{CD}$ với giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{PQ}$.

Hai vectơ được gọi là *cùng phương* nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.



Hình 40

3 Quan sát hai biển báo ở *Hình 41a, 41b,* cho biết hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ có cùng hướng hay không.

Nhận xét: Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

Biển báo hướng đi về bên phải
a)

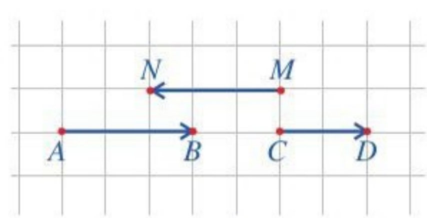
Biển báo hướng đi về bên trái
b)

Hình 41

Ví dụ 3 Trong *Hình 42*, tìm vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$; ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Giải

Vectơ $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$, vectơ $\overrightarrow{MN}$ ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$.



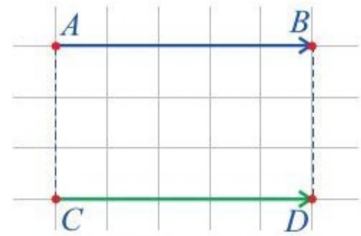
Hình 42

III. HAI VECTƠ BẰNG NHAU

4 Quan sát hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ở *Hình 43*.

a) Nhận xét về phương, về hướng của hai vectơ đó.

b) So sánh độ dài của hai vectơ đó.



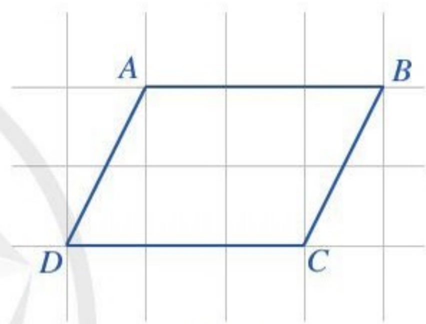
Hình 43

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ có cùng hướng và cùng độ dài.

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ *bằng nhau* nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Nhận xét

- Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.
- Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.



Hình 44

Ví dụ 4 Cho hình bình hành $ABCD$ (*Hình 44*).

a) Vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$?

b) Vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$?

Giải

a) Vì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng và $AB = DC$ nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

b) Vì $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng và $AD = BC$ nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

2 Cho tam giác ABC. Vẽ điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Tứ giác $ABCD$ là hình gì?

IV. VECTƠ-KHÔNG

Cho điểm A, ta xét một vectơ đặc biệt, trong đó A vừa là điểm đầu vừa là điểm cuối. Vectơ này được kí hiệu là $\overrightarrow{AA}$ và gọi là *vectơ-không*.

Vectơ-không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

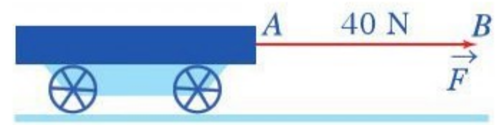
Ta quy ước $\vec{0}$ (vectơ-không) cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ và $|\vec{0}| = 0$. Do đó có thể coi mọi vectơ-không đều bằng nhau. Như vậy, $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$ với mọi điểm $A, B \ldots$

Nhận xét: Hai điểm A, B trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

V. BIỂU THỊ MỘT SỐ ĐẠI LƯỢNG CÓ HƯỚNG BẰNG VECTƠ

Trong vật lí, một số đại lượng như: lực, vận tốc, … là đại lượng có hướng. Người ta dùng vectơ để biểu thị các đại lượng có hướng đó, chẳng hạn:

Một lực $\overrightarrow{F}$ tác động lên xe tại điểm đặt A; lực $\overrightarrow{F}$ có phương nằm ngang, hướng từ trái sang phải và cường độ là 40 N. Ta biểu thị lực $\overrightarrow{F}$ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ như *Hình 45*.



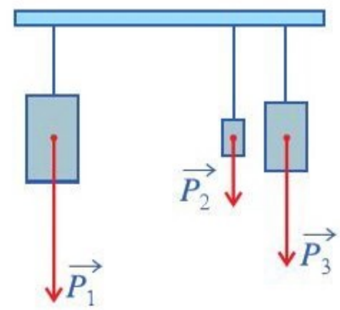
Hình 45

Ví dụ 5 Khi treo ba vật, mỗi vật sẽ tác dụng vào thanh treo một lực (trọng lực) như ở *Hình 46*.

Nhận xét đặc điểm về phương, hướng của ba vectơ biểu thị trọng lực.

Giải

Trong vật lí, các vectơ trọng lực có cùng hướng nên ba vectơ $\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}$, $\overrightarrow{P_3}$ biểu thị trọng lực có cùng hướng.



Hình 46

BÀI TẬP

1. Cho A, B, C là ba điểm thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Viết các cặp vectơ cùng hướng, ngược hướng trong những vectơ sau: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$.

2. Cho đoạn thẳng MN có trung điểm là I.

a) Viết các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là một trong ba điểm M, N, I.

b) Vectơ nào bằng $\overrightarrow{MI}$? Bằng $\overrightarrow{NI}$?

3. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD. Tìm vectơ:

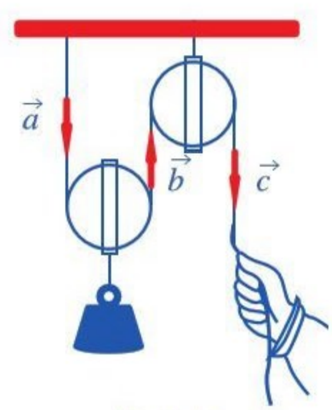
a) Cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$; b) Ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$.

4. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 3 cm. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

5. Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. Chuyển động của các đoạn dây được mô tả bằng các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (*Hình 47*).

a) Hãy chỉ ra các cặp vectơ cùng phương.

b) Trong các cặp vectơ đó, cho biết chúng cùng hướng hay ngược hướng.



Hình 47

§4 TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

Quan sát hình ảnh hai người cùng kéo một chiếc thuyền theo hai hướng khác nhau (*Hình 48*). Tuy nhiên, chiếc thuyền lại không di chuyển theo cùng hướng với một trong hai người đó mà di chuyển theo một hướng khác.

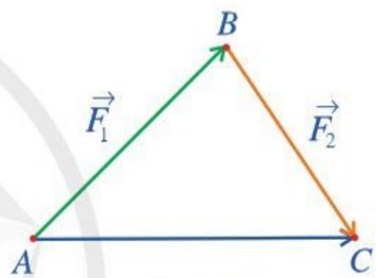
Tại sao chiếc thuyền lại di chuyển như vậy?

Hình 48

I. TỔNG CỦA HAI VECTƠ

1. Định nghĩa

1 Một vật dịch chuyển từ A đến B sau khi chịu tác động của lực $\overrightarrow{F_1}$. Vật tiếp tục dịch chuyển từ B đến C sau khi chịu tác động của lực $\overrightarrow{F_2}$ (*Hình 49*). Sau khi chịu tác động của hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, vật đó dịch chuyển từ vị trí A đến vị trí nào?



Hình 49

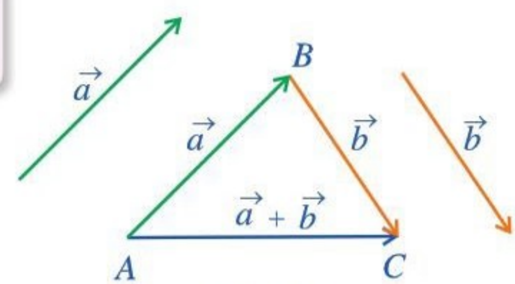
Ta có định nghĩa sau:

> Với ba điểm bất kì A, B, C, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$, kí hiệu là $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

2 Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý.

a) Vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (*Hình 50*).

b) Tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ nào?



Hình 50

> Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.
> Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là *phép cộng vectơ*.

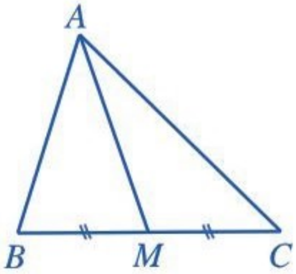
Ví dụ 1 Cho tam giác ABC có trung tuyến AM (*Hình 51*).

Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}$.

Giải

Vì $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BM}$ nên

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$.



Hình 51

1 Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh

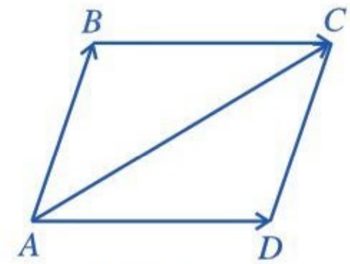
$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AN}.$$

2. Quy tắc hình bình hành

3 Cho $ABCD$ là hình bình hành (*Hình 52*). So sánh:

a) Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

b) Vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và vectơ $\overrightarrow{AC}$.



Hình 52

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 2 Cho hình chữ nhật $ABCD$.

Chứng minh $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right|$.

Giải

Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC$, $\left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right| = BD$.

Do $AC = BD$ nên $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right|$.

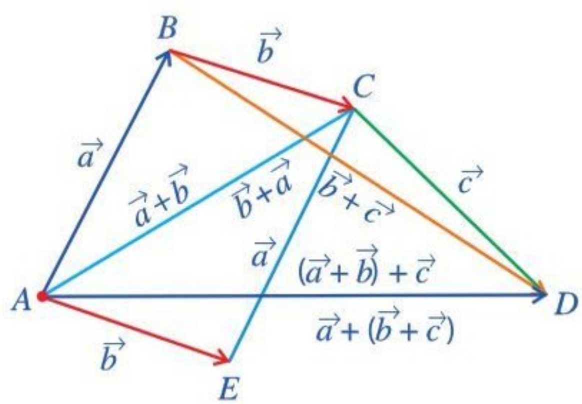
2 Hãy giải thích hướng đi của thuyền ở *Hình 48*.

3. Tính chất

Với ba vectơ tuỳ ý $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp);
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất của vectơ-không).

(*Hình 53*)



Hình 53. Minh hoạ tính chất phép cộng các vectơ

Chú ý: Tổng ba vectơ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ được xác định theo một trong hai cách:

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ hoặc $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Ví dụ 3 Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.$$

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$

3 Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm E bất kì. Chứng minh

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$.

II. HIỆU CỦA HAI VECTƠ

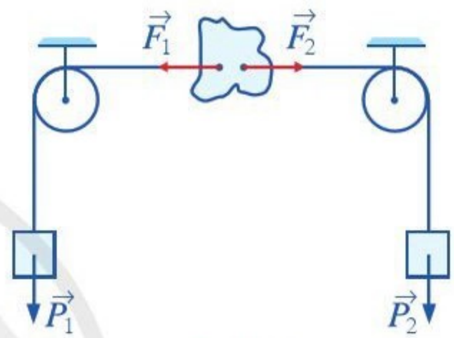
1. Hai vectơ đối nhau

4 Trong *Hình 54*, hai ròng rọc có trục quay nằm ngang và song song với nhau, hai vật có trọng lượng bằng nhau. Mỗi dây có một đầu buộc vào vật, một đầu buộc vào một mảnh nhựa cứng. Hai vật lần lượt tác động lên mảnh nhựa các lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$. Nhận xét về hướng và độ dài của mỗi cặp vectơ sau:

a) $\overrightarrow{P_1}$ và $\overrightarrow{P_2}$ biểu diễn trọng lực của hai vật;

b) $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$.

(Bỏ qua trọng lượng của các dây và các lực ma sát)



Hình 54

Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là *vectơ đối* của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$. Hai vectơ $\vec{a}$ và $-\vec{a}$ được gọi là hai vectơ đối nhau.

Quy ước: Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

Nhận xét:
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.
- Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.
- Với hai điểm A, B, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Cho hai điểm A, B. Khi đó, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ là hai vectơ đối nhau, tức là $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 4 Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng tỏ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ là hai vectơ đối nhau. Viết đẳng thức liên hệ giữa hai vectơ đó.

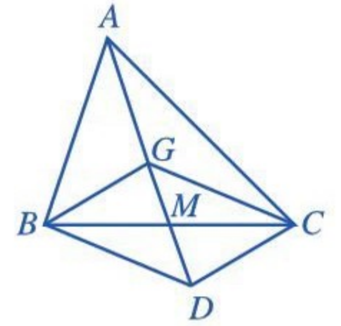
Giải

Hai vectơ $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$ là hai vectơ đối nhau vì chúng ngược hướng và cùng độ dài, $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Chú ý: I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Ví dụ 5 Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với G qua M (*Hình 55*). Chứng minh:

a) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$;   b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.



Hình 55

Giải

a) Vì tứ giác $BGCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên tứ giác $BGCD$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.

b) Vì hai điểm A, D cùng thuộc đường thẳng GM nên các điểm A, G, M, D thẳng hàng.

Ta có: $GA = GD$. Suy ra G là trung điểm của AD.

Vì thế $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Vậy $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

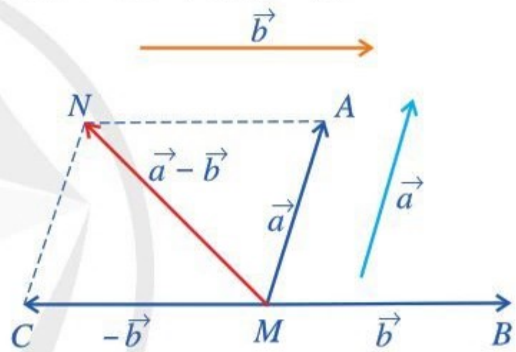
Chú ý: G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

2. Hiệu của hai vectơ

5 Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm M tuỳ ý.

a) Vẽ $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = -\vec{b}$ (*Hình 56*).

b) Tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $(-\vec{b})$ bằng vectơ nào?



Hình 56

Hiệu của vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

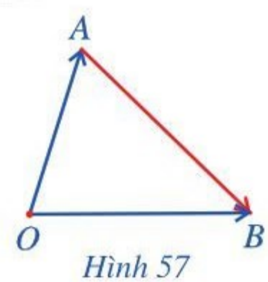
Phép lấy hiệu của hai vectơ còn được gọi là *phép trừ vectơ*.

Ví dụ 6 Cho ba điểm A, B, O (*Hình 57*). Vectơ $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ là vectơ nào?

Giải

Ta có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$.

Nhận xét: Với ba điểm bất kì A, B, O ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.



Hình 57

Ví dụ 7 Cho bốn điểm bất kì A, B, C, D. Chứng minh $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB})$

$= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$.

4 Cho tam giác ABC có M là trung điểm AC, N là trung điểm BC và $AB = a$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{NB}$.

BÀI TẬP

1. Cho ba điểm M, N, P. Vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}$ bằng vectơ nào sau đây?

A. $\overrightarrow{PN}$. B. $\overrightarrow{PM}$. C. $\overrightarrow{MP}$. D. $\overrightarrow{NM}$.

2. Cho ba điểm D, E, G. Vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{DE} + (-\overrightarrow{DG})$ bằng vectơ nào sau đây?

A. $\overrightarrow{EG}$. B. $\overrightarrow{GE}$. C. $\overrightarrow{GD}$. D. $\overrightarrow{ED}$.

3. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

4. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$;

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

5. Cho đường tròn tâm O. Giả sử A, B là hai điểm nằm trên đường tròn. Tìm điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ đối nhau.

6. Cho $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ với mọi điểm M trong mặt phẳng.

7. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Tính độ dài của các vectơ sau:

a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$;

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$;

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ với O là giao điểm của AC và BD.

8. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{OC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm O và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ đều là 120 N và $\widehat{AOB} = 120^{\circ}$. Tìm cường độ và hướng của lực $\overrightarrow{F_3}$.

9. Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là 10 km/h. Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc 40 km/h so với mặt nước. Tìm vận tốc của ca nô so với bờ sông.

§5 TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

Hình 58 minh hoạ hai đoàn tàu chạy song song với vectơ vận tốc lần lượt là $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

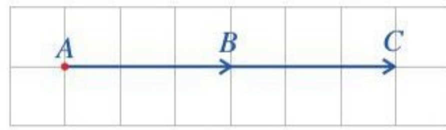
Mối liên hệ giữa hai vectơ vận tốc $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ là như thế nào?

(*Nguồn: https://pixabay.com*)

Hình 58

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC. Quan sát *Hình 59* và thực hiện các hoạt động sau:



Hình 59

1 Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.

Để chứng tỏ đẳng thức trên, ta làm như sau: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.

Tương tự cách viết tổng $a + a$ ở dạng $2a$ ($a \in \mathbb{R}$), ta có thể viết tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$ ở dạng $2\overrightarrow{AB}$.

Vectơ $2\overrightarrow{AB}$ gọi là *tích của số 2 với vectơ* $\overrightarrow{AB}$. Do đó tích của số 2 với vectơ $\overrightarrow{AB}$ là vectơ $\overrightarrow{AC}$.

2 Quan sát vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$, nêu mối liên hệ về hướng và độ dài của vectơ $2\overrightarrow{AB}$ với $\overrightarrow{AB}$.

Vectơ $2\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ và $\left|2\overrightarrow{AB}\right| = 2\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Một cách tổng quát, ta có:

> Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:
>
> - Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
> - Có độ dài bằng $|k| . |\vec{a}|$.

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$, $k\vec{0} = \vec{0}$.

Phép lấy tích của một số với một vectơ gọi là *phép nhân một số với một vectơ*.

Ví dụ 1 Cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC. Tìm số k trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$; b) $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{AB}$.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ là hai vectơ cùng hướng và

$$|\overrightarrow{CA}| = 2|\overrightarrow{CB}|.$$

Suy ra $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB}$. Vậy $k = 2$.

b) Ta có: $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ là hai vectơ ngược hướng và $|\overrightarrow{CA}| = 2|\overrightarrow{AB}|$.

Suy ra $\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AB}$. Vậy $k = -2$.

1 Cho tam giác ABC. Hai đường trung tuyến AM và BN cắt nhau tại G.

Tìm các số a, b biết:

$\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{GN} = b\overrightarrow{GB}$.

Ví dụ 2 Vật thứ nhất chuyển động thẳng đều từ A đến B với tốc độ là 9 m/s và vật thứ hai chuyển động thẳng đều từ B đến A với tốc độ là 6 m/s. Gọi $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ lần lượt là các vectơ vận tốc của vật thứ nhất và vật thứ hai. Có hay không số thực k thoả mãn $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$?

Giải

Do tỉ số tốc độ của vật thứ nhất và vật thứ hai là $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ đồng thời hai vật chuyển động ngược hướng nên hai vectơ vận tốc ngược hướng. Suy ra $\vec{v}_1 = \frac{-3}{2}\vec{v}_2$. Vậy $k = \frac{-3}{2}$.

II. TÍNH CHẤT

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ và hai số thực h, k, ta có:

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$;
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$;
- $1\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Nhận xét: $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

Ví dụ 3 Cho ba điểm A, B, C. Chứng minh:

a) $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$;

b) $3(5\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.

2 Cho ba điểm A, B, C. Chứng minh

$3(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}) - 2(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}$.

Giải

a) Ta có: $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC}$.

b) Ta có: $3(5\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC} = 15\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC}$

$$= 15\overrightarrow{AC} - 14\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.$$

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

1. Trung điểm của đoạn thẳng

3 Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và điểm M tuỳ ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Để chứng minh đẳng thức trên, ta làm như sau:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MI}$.

Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ với điểm M bất kì.

2. Trọng tâm của tam giác

4 Cho G là trọng tâm của tam giác ABC và điểm M tuỳ ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Để chứng minh đẳng thức trên, ta làm như sau:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})$$

$$= 3\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{MG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với điểm M bất kì.

Ví dụ 4 Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Chứng minh $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Giải

Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$.

Vì N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$.

Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = 2\vec{0} = \vec{0}$.

3 Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.

3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

5 Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$ với k là số thực khác 0. Nêu nhận xét về phương của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

6 Cho ba điểm phân biệt A, B, C.

a) Nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng thì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ có cùng phương hay không?

b) Ngược lại, nếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương thì ba điểm A, B, C có thẳng hàng hay không?

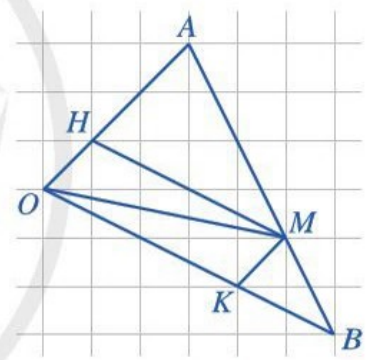
Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là có số thực k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 5 Cho tam giác OAB. Điểm M thuộc cạnh AB sao cho $AM = \frac{2}{3}AB$. Kẻ $MH \parallel OB$, $MK \parallel OA$ (*Hình 60*).

Giả sử $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

a) Biểu thị $\overrightarrow{OH}$ theo $\vec{a}$ và $\overrightarrow{OK}$ theo $\vec{b}$.

b) Biểu thị $\overrightarrow{OM}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.



Hình 60

Giải

a) Ta có: $MK \parallel OA$, $MH \parallel OB$ suy ra

$$\frac{OK}{OB} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}, \quad \frac{OH}{OA} = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Vì $\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng và $OH = \frac{1}{3}OA$ nên

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\vec{a}.$$

Vì $\overrightarrow{OK}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng và $OK = \frac{2}{3}OB$ nên

$$\overrightarrow{OK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\vec{b}.$$

b) Vì tứ giác $OHMK$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

4 Ở *Hình 61*, tìm k trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AD}$;

b) $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{DC}$.

Hình 61

Nhận xét: Trong mặt phẳng, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mỗi vectơ $\vec{c}$ có duy nhất cặp số $(x ; y)$ thoả mãn $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

BÀI TẬP

1. Cho hình thang $MNPQ$, $MN \parallel PQ$, $MN = 2PQ$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{PQ}$. B. $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{NP}$. C. $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{PQ}$. D. $\overrightarrow{MQ} = -2\overrightarrow{NP}$.

2. Cho đoạn thẳng $AB = 6$ cm.

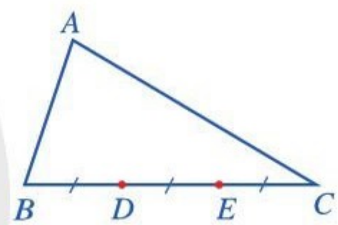
a) Xác định điểm C thoả mãn $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

b) Xác định điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

3. Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN}$; b) $\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BA}$.

4. Cho tam giác ABC. Các điểm D, E thuộc cạnh BC thoả mãn $BD = DE = EC$ (*Hình 62*). Giả sử $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.



Hình 62

5. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN, E là trọng tâm tam giác BCD. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 4\overrightarrow{EG}$;

b) $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG}$;

c) Điểm G thuộc đoạn thẳng AE và $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$.

6. Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CG}$ theo hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$.

7. Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, H thoả mãn

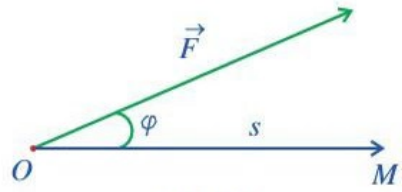
$$\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

a) Biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{HE}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh D, E, H thẳng hàng.

§6 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Trong vật lí, nếu có một lực $\vec{F}$ tác động lên một vật tại điểm O và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường $s = OM$ (*Hình 63*) thì công A của lực $\vec{F}$ được tính theo công thức $A = |\vec{F}| \, . \, |\overrightarrow{OM}| \, . \cos\varphi$ trong đó $|\vec{F}|$ gọi là cường độ của lực $\vec{F}$ tính bằng Newton (N), $|\overrightarrow{OM}|$ là độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ tính bằng mét (m), φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\vec{F}$, còn công A tính bằng Jun (J).



Hình 63

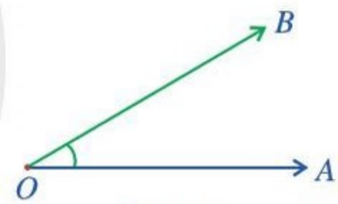
Trong toán học, giá trị của biểu thức $A = |\vec{F}| \, . \, |\overrightarrow{OM}| \, . \cos\varphi$ (không kể đơn vị đo) được gọi là gì?

I. ĐỊNH NGHĨA

1. Tích vô hướng của hai vectơ có cùng điểm đầu

Trong mặt phẳng, cho hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ khác $\vec{0}$ (*Hình 64*).

- Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ là góc giữa hai tia OA, OB và được kí hiệu là $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là một số thực, kí hiệu $\overrightarrow{OA} \, . \, \overrightarrow{OB}$, được xác định bởi công thức: $\overrightarrow{OA} \, . \, \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \, . \, |\overrightarrow{OB}| \, . \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.



Hình 64

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = 4$ cm.

a) Tính độ dài cạnh huyền BC.

b) Tính $\overrightarrow{AB} \, . \, \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA} \, . \, \overrightarrow{BC}$.

Giải

a) $BC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (cm).

b) $\overrightarrow{AB} \, . \, \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \, . \, |\overrightarrow{AC}| \, . \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \, . \, 4 \, . \cos\widehat{BAC} = 16 \, . \cos 90^\circ = 16 \, . \, 0 = 0.$

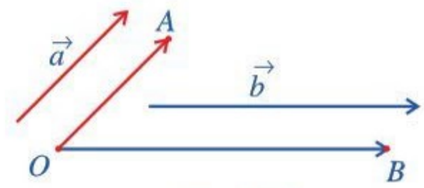
$$\overrightarrow{BA} \, . \, \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \, . \, |\overrightarrow{BC}| \, . \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 4 \, . \, 4\sqrt{2} \, . \cos\widehat{ABC} = 16\sqrt{2} \, . \cos 45^\circ$$

$$= 16\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16.$$

1 Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$, $AB = 3$ cm. Tính $\overrightarrow{BA} \, . \, \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA} \, . \, \overrightarrow{CB}$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ tuỳ ý

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O và vẽ vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (*Hình 65*).



Hình 65

- Góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$, là tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Như vậy, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Quy ước: Tích vô hướng của một vectơ bất kì với vectơ $\vec{0}$ là số 0.

Chú ý

- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^{\circ}$ thì ta nói hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$. Khi đó $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos 90^{\circ} = 0$.
- Tích vô hướng của hai vectơ cùng hướng bằng tích hai độ dài của chúng.
- Tích vô hướng của hai vectơ ngược hướng bằng số đối của tích hai độ dài của chúng.

Ta có thể chứng minh chú ý thứ ba như sau:

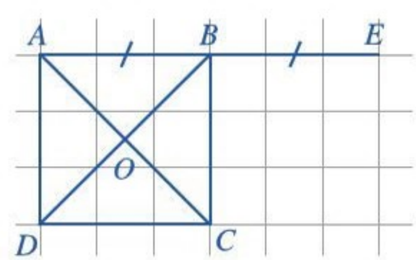
Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ (khác $\vec{0}$) cùng hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^{\circ}$. Do đó, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$. Vì vậy, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Nếu một trong hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì $\vec{a}.\vec{b} = 0$ và $|\vec{a}|.|\vec{b}| = 0$ nên $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Chú ý thứ tư được chứng minh tương tự như trên.

Ví dụ 2 Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có độ dài cạnh bằng a. Tính:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}$; b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$; c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD}$.



Hình 66

Giải. (*Hình 66*)

a) Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \widehat{BAO} = 45^{\circ}$.

Vậy $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{OC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| . \left|\overrightarrow{OC}\right| . \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC})$

$$= a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 45^{\circ} = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

b) Vẽ vectơ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Ta có:

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) = \widehat{EBD} = 135^{\circ}$.

Vậy $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{BD} = \left|\overrightarrow{AB}\right| . \left|\overrightarrow{BD}\right| . \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD})$

$$= a \,.\, a\sqrt{2} \,.\, \cos 135^{\circ} = a^2\sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -a^2.$$

c) Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BO}) = \widehat{EBO} = 135^{\circ}$.

Vậy $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{OD} = \left|\overrightarrow{AB}\right| . \left|\overrightarrow{OD}\right| . \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 135^{\circ} = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-a^2}{2}.$

2 Cho tam giác ABC đều cạnh a, AH là đường cao. Tính:

a) $\overrightarrow{CB} \,.\, \overrightarrow{BA}$;

b) $\overrightarrow{AH} \,.\, \overrightarrow{BC}$.

II. TÍNH CHẤT

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và số thực k tuỳ ý, ta có:

- $\vec{a} \,.\, \vec{b} = \vec{b} \,.\, \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \,.\, (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \,.\, \vec{b} + \vec{a} \,.\, \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \,.\, \vec{b} = k(\vec{a} \,.\, \vec{b}) = \vec{a} \,.\, (k\vec{b})$;
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

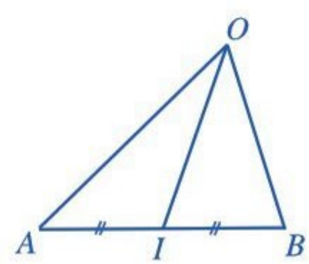
Trong đó, kí hiệu $\vec{a} \,.\, \vec{a} = \vec{a}^2$ và biểu thức này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ 3 Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có:

a) $\overrightarrow{OI} \,.\, \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \,.\, \overrightarrow{IB} = 0$;

b) $\overrightarrow{OI} \,.\, \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2)$.

Giải. (*Hình 67*)



Hình 67

a) Vì I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{OI} \,.\, \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \,.\, \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OI} \,.\, (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{OI} \,.\, \vec{0} = 0$.

b) Vì I là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})$.

Vậy $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot (-\overrightarrow{OA})$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2).$$

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC vuông tại A. Tính:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Giải

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$
$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

(Do $\overrightarrow{AB}$ vuông góc với $\overrightarrow{AC}$).

3 Chứng minh rằng với hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$, ta có:

$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;

$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;

$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

1. Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm A, B phân biệt, ta có: $\overrightarrow{AB}^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$.

Do đó độ dài đoạn thẳng AB được tính như sau: $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

Ví dụ 5 (Định lí côsin trong tam giác)

Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Giải

Ta có: $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

Suy ra: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

4 Sử dụng tích vô hướng, chứng minh định lí Pythagore: Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Nhận xét: Cho hai vectơ bất kì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

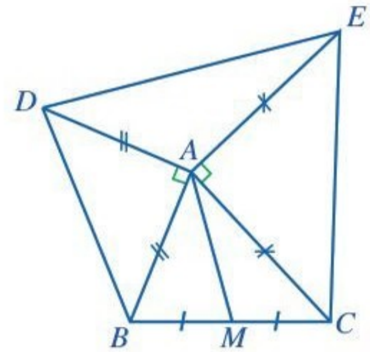
Hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Cũng như vậy, hai đường đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, trong đó $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$, giá của vectơ $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vectơ $\vec{v}$ song song hoặc trùng với đường thẳng b.

Ví dụ 6 Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $\widehat{A} = 60^o$. Gọi M là trung điểm của BC. Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE (*Hình 68*).

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Từ đó chứng minh $AM \perp DE$.



Hình 68

Giải

a) Do $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 150^o$, $\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD} = 150^o$ nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AB \cdot AE \cdot \cos\widehat{BAE} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3};$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = AC \cdot AD \cdot \cos\widehat{CAD} = 4 \cdot 3 \cdot \cos 150^o = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}.$$

b) Ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \ \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}).$$

Vì $AB \perp AD, AC \perp AE$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$.

Suy ra $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(-6\sqrt{3} + 0 - 0 + 6\sqrt{3}) = 0$. Vậy $AM \perp DE$.

BÀI TẬP

1. Nếu hai điểm M, N thoả mãn $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4$ thì độ dài đoạn thẳng MN bằng bao nhiêu?

A. $MN = 4$. B. $MN = 2$. C. $MN = 16$. D. $MN = 256$.

2. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^o$ thì $\vec{a} . \vec{b} < 0$.

B. Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^o$ thì $\vec{a} . \vec{b} > 0$.

C. Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^o$ thì $\vec{a} . \vec{b} > 0$.

D. Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^o$ thì $\vec{a} . \vec{b} < 0$.

3. Tính $\vec{a} . \vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^o$;

b) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^o$;

c) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng;

d) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

4. Cho hình vuông *ABCD* cạnh *a*. Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$;   b) $\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BD}$.

5. Cho tam giác *ABC*. Chứng minh:

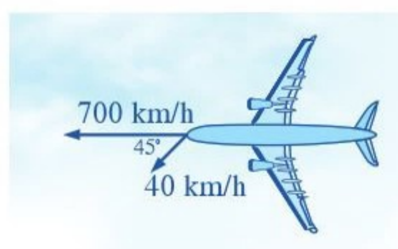
$$AB^2 + \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{CA} = 0.$$

6. Cho tam giác nhọn *ABC*, kẻ đường cao *AH*. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$;

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BC}$.

7. Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 700 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 40 km/h (*Hình 69*). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay theo đơn vị km/h (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 69

8. Cho tam giác *ABC* có $AB = 2$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 60^o$. Gọi *M* là trung điểm của đoạn thẳng *BC*. Điểm *D* thoả mãn $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.

a) Tính $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$.

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

c) Chứng minh $AM \perp BD$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

1. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $\widehat{BAC} = 120^{o}$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

a) Độ dài cạnh BC và độ lớn góc B;

b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp;

c) Diện tích của tam giác;

d) Độ dài đường cao xuất phát từ A;

e) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}$ với M là trung điểm của BC.

2. Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

$A = (\sin 20^{o} + \sin 70^{o})^2 + (\cos 20^{o} + \cos 110^{o})^2$,

$B = \tan 20^{o} + \cot 20^{o} + \tan 110^{o} + \cot 110^{o}$.

3. Không dùng thước đo góc, làm thế nào để biết số đo góc đó.

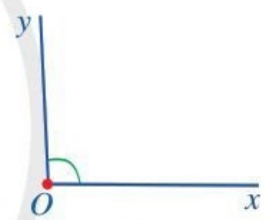
Bạn Hoài vẽ góc xOy và đố bạn Đông làm thế nào có thể biết được số đo của góc này khi không có thước đo góc. Bạn Đông làm như sau:

– Chọn các điểm A, B lần lượt thuộc các tia Ox và Oy sao cho $OA = OB = 2$ cm;

– Đo độ dài đoạn thẳng AB được $AB = 3,1$ cm.

Từ các dữ kiện trên bạn Đông tính được $\cos\widehat{xOy}$, từ đó suy ra độ lớn góc xOy.

Em hãy cho biết số đo góc xOy ở *Hình 70* bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



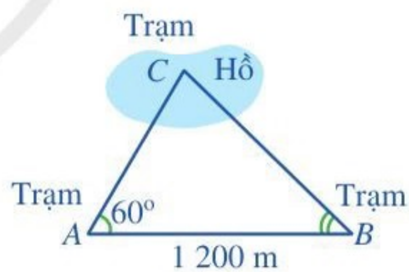
Hình 70

4. Có hai trạm quan sát A và B ven hồ và một trạm quan sát C ở giữa hồ. Để tính khoảng cách từ A và từ B đến C, người ta làm như sau (*Hình 71*):

– Đo góc BAC được 60^{o}, đo góc ABC được 45^{o};

– Đo khoảng cách AB được 1 200 m.

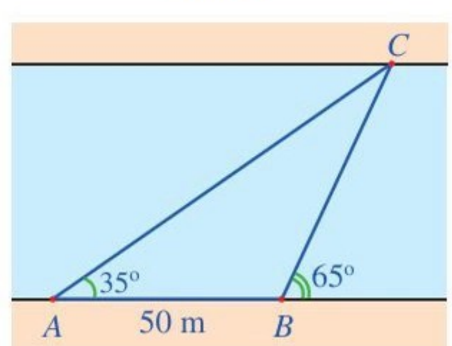
Khoảng cách từ trạm C đến các trạm A và B bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 71

5. Một người đứng ở bờ sông, muốn đo độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí đang đứng (khúc sông tương đối thẳng, có thể xem hai bờ song song với nhau).

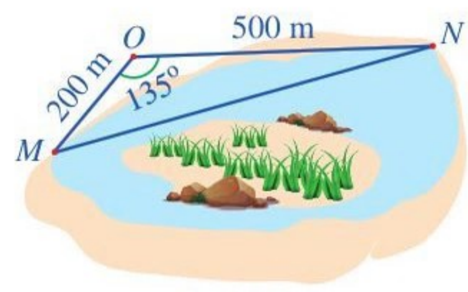
Từ vị trí đang đứng A, người đó đo được góc nghiêng $\alpha = 35^{o}$ so với bờ sông tới một vị trí C quan sát được



Hình 72

ở phía bờ bên kia. Sau đó di chuyển dọc bờ sông đến vị trí B cách A một khoảng $d = 50$ m và tiếp tục đo được góc nghiêng $\beta = 65^{\circ}$ so với bờ bên kia tới vị trí C đã chọn (*Hình 72*). Hỏi độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí người đó đang đứng là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

6. Để đo khoảng cách giữa hai vị trí M, N ở hai phía ốc đảo, người ta chọn vị trí O bên ngoài ốc đảo sao cho: O không thuộc đường thẳng MN; các khoảng cách OM, ON và góc MON là đo được (*Hình 73*). Sau khi đo, ta có $OM = 200$ m, $ON = 500$ m, $\widehat{MON} = 135^{\circ}$.



Hình 73

Khoảng cách giữa hai vị trí M, N là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

7. Chứng minh:

a) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$ với E là điểm bất kì;

b) Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{MN}$ với M, N là hai điểm bất kì;

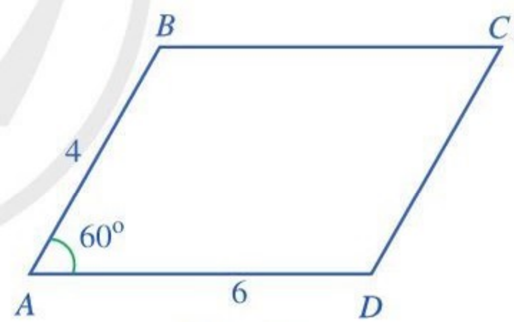
c) Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NG}$ với M, N là hai điểm bất kì.

8. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4$, $AD = 6$, $\widehat{BAD} = 60^{\circ}$ (*Hình 74*).

a) Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.

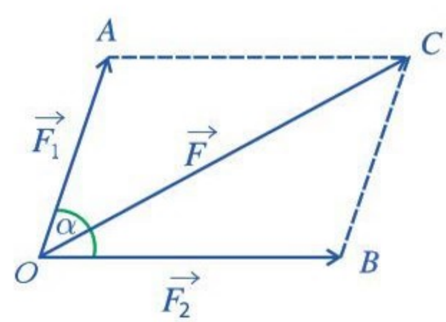
b) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.

c) Tính độ dài các đường chéo BD, AC.



Hình 74

9. Hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ cho trước cùng tác dụng lên một vật tại điểm O và tạo với nhau một góc $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = \alpha$ làm cho vật di chuyển theo hướng từ O đến C (*Hình 75*). Lập công thức tính cường độ của hợp lực $\overrightarrow{F}$ làm cho vật di chuyển theo hướng từ O đến C (giả sử chỉ có đúng hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ làm cho vật di chuyển).



Hình 75

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

CHỦ ĐỀ 1. ĐO GÓC

Các góc có ý nghĩa gì trong thực tiễn?

I. NỘI DUNG CHÍNH CỦA CHỦ ĐỀ

1. Những hình ảnh về góc trong cuộc sống

1 Quan sát những hình ảnh về góc trong một số tình huống sau đây và nêu cách xác định những góc đó.

***a) Tình huống 1**: Góc sút*

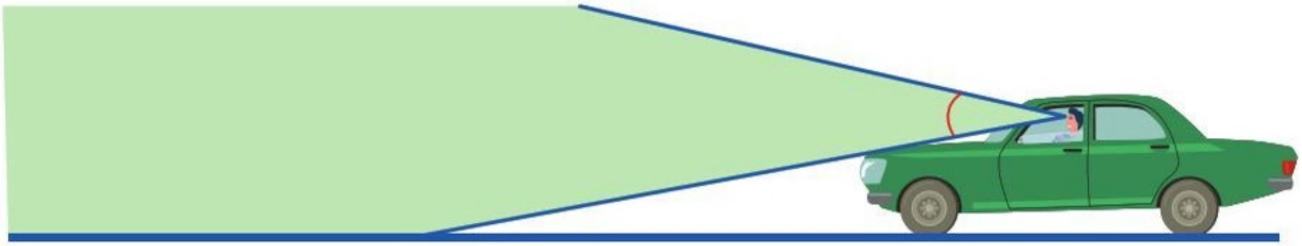
Trong bóng đá, khi cầu thủ đá phạt, "góc sút" được hiểu là góc tạo bởi hai tia có gốc là điểm đặt bóng, lần lượt nối gốc với hai chân của khung thành (*Hình 1*).

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 1. Đá phạt trong bóng đá

***b) Tình huống 2**: Góc nhìn*

Khi lái xe, góc nhìn của tài xế giới hạn bởi hai tia (*Hình 2*):



Hình 2. Góc nhìn khi lái xe

Góc nhìn (vùng được tô màu) diễn tả vùng ta quan sát được. Vì ta không thể trông thấy các vật ở ngoài góc nhìn nên vùng không tô màu được gọi là *vùng mù* (hay vùng các điểm mù). Góc nhìn càng lớn ta càng thấy nhiều sự vật hơn và càng lái xe an toàn hơn.

2. Tìm kiếm những hình ảnh về góc trong thực tiễn

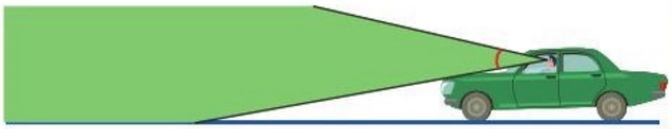
Em hãy tìm thêm những hình ảnh về góc trong thực tiễn.

3. Ý nghĩa và ứng dụng của góc trong thực tiễn

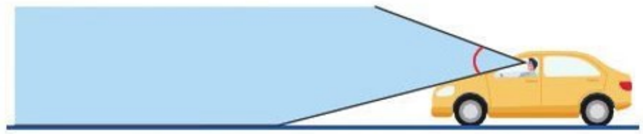
Góc có nhiều ứng dụng trong thực tiễn, đặc biệt trong an toàn giao thông.

***a) Tình huống 1**: Góc nhìn của người lái xe hạng nhỏ*

Hình 3 và *Hình 4* minh hoạ góc nhìn của người lái xe ngồi trên ô tô. Rõ ràng, nếu góc nhìn của xe 2 lớn hơn góc nhìn của xe 1 thì đi xe 2 sẽ an toàn hơn.

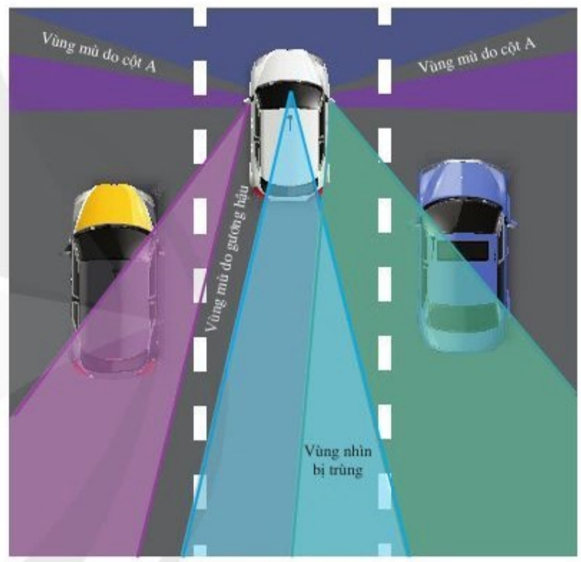


Hình 3. Góc nhìn của xe 1



Hình 4. Góc nhìn của xe 2

Hình 5 cho ta hình ảnh về góc nhìn của người lái xe (bằng mắt thường và thông qua gương chiếu hậu) và vùng mù (màu xám) của người lái xe hạng nhỏ.



Hình 5. Vùng quan sát của người lái xe hạng nhỏ

***b) Tình huống 2**: Góc nhìn của người lái xe tải*

Xe tải khi lưu thông trên đường sẽ không quan sát được các vùng có màu đỏ (*Hình 6*).

Hình 6. Vùng quan sát của người lái xe tải

Xe càng lớn thì vùng mù của người lái xe càng lớn. Do đó, khi tham gia giao thông phải tuyệt đối tránh di chuyển vào vùng mù của người lái xe.

Em hãy tìm thêm những ứng dụng của góc trong thực tiễn.

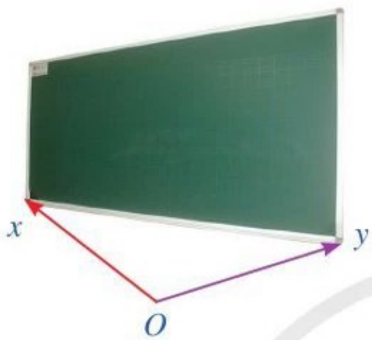
II. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

1. Thực hành đo góc trong thực tiễn bằng thước đo góc

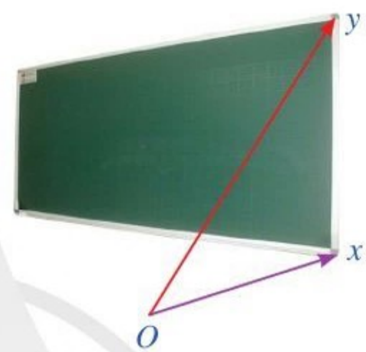
2

a) Nhiệm vụ: *Tìm số đo góc trong ba tình huống thực tế sau*:

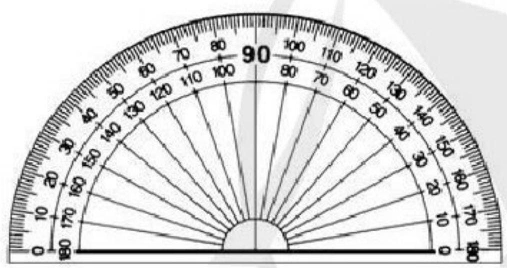
Tình huống 1: Có một chiếc bảng treo trên tường nhưng cạnh đáy dưới của bảng nằm trên mặt sàn lớp học. Tìm số đo của góc trong *Hình 7* và *Hình 8* bằng cách sử dụng thước đo góc 180° (*Hình 9*) hoặc thước đo góc 360° *(Hình 10)*, biết điểm gốc *O* ở trên mặt sàn lớp học.

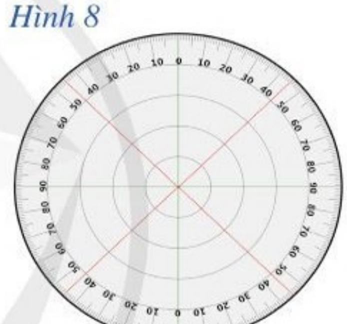


Hình 7



Hình 8


Hình 9


Hình 10

Tình huống 2: Câu hỏi tương tự như trong *Tình huống 1* nhưng chiếc bảng treo trên tường có cạnh đáy dưới song song với mặt sàn lớp học và điểm gốc *O* ở trên mặt sàn lớp học.

Tình huống 3: Câu hỏi tương tự như trong *Tình huống 2* nhưng điểm gốc *O* cách mặt sàn lớp học là 110 cm.

b) Trình bày ý tưởng

Đối với tình huống 1:

– Thước đo góc cần đặt như thế nào để xác định được tia *Ox* của góc *xOy* trong *Hình 7*?

  Sau khi đặt thước đo góc như vậy thì tia *Oy* của góc *xOy* trong *Hình 7* được xác định như thế nào?

– Thước đo góc cần đặt như thế nào để xác định được tia *Ox* của góc *xOy* trong *Hình 8*?

  Sau khi đặt thước đo góc như vậy thì tia *Oy* của góc *xOy* trong *Hình 8* được xác định như thế nào?

Đối với tình huống 2: Các bước thực hiện tương tự như trong *Tình huống 1*.

Đối với tình huống 3: Liên hệ với các bước trong *Tình huống 2* để đưa ra cách đo.

c) Báo cáo kết quả

Trình bày các bước đo góc theo ý tưởng đã nêu.

Hoàn thành bảng thống kê sau với đơn vị đo là độ (sau khi làm tròn đến hàng đơn vị).

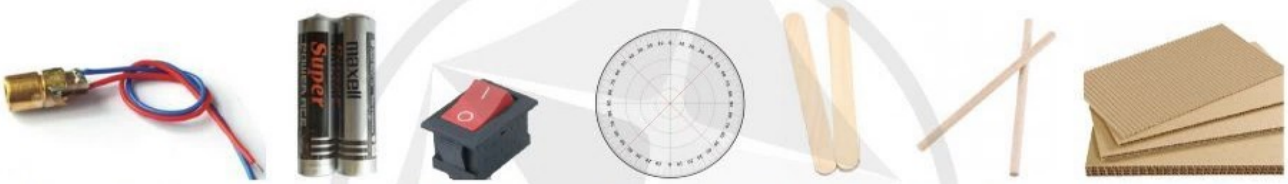
	Độ lớn của góc *xOy* trong *Hình 7*	**Độ lớn của góc *xOy* trong *Hình 8***
Tình huống 1	?	?
Tình huống 2	?	?
Tình huống 3	?	?

2. Tạo dựng và thực hành đo góc bằng dụng cụ có gắn tia chiếu laser

a) Phần chuẩn bị

3 Học sinh được chia theo nhóm. Các nhóm chuẩn bị thiết bị và trao đổi, thảo luận.

- Chuẩn bị (*Hình 11*): đèn chiếu laser, pin, công tắc, thước đo góc 360°, que kem, que gỗ tròn, bìa cát tông.



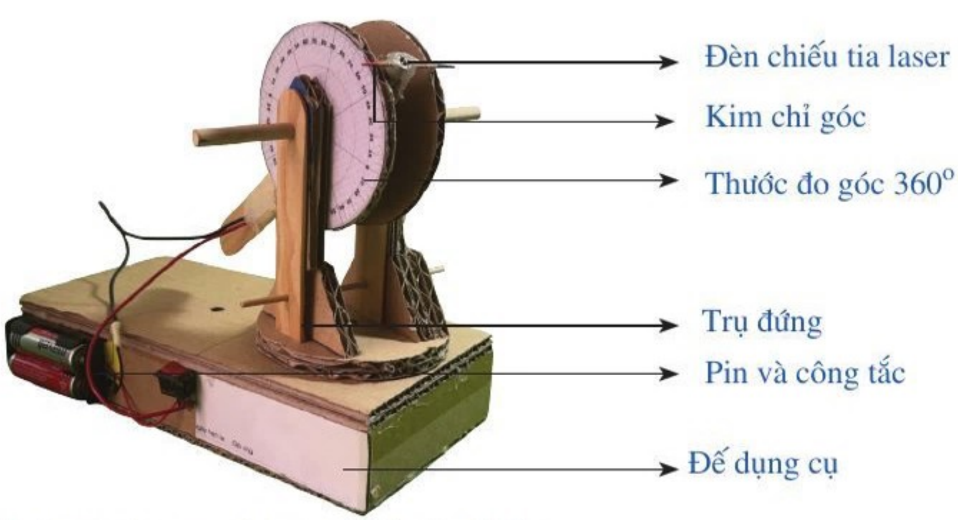
Đèn chiếu laser | Pin | Công tắc | Thước đo góc 360° | Que kem | Que gỗ tròn | Bìa cát tông

Hình 11

- Xác định rõ nhiệm vụ của nhóm và từng nhiệm vụ thành phần.
- Phân công nhiệm vụ cho các thành viên trong nhóm.
- Xác định thời gian hoàn thành từng nhiệm vụ thành phần và nhiệm vụ chung.

b) Phần thực hiện

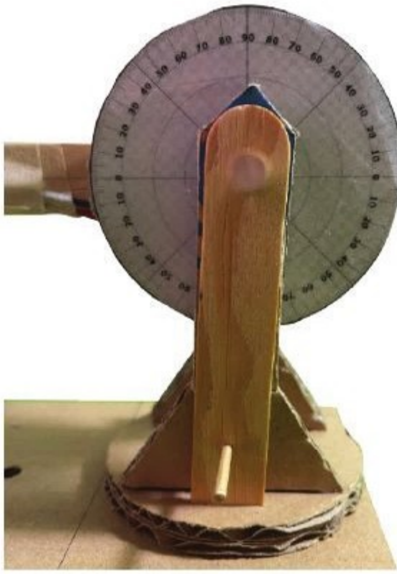
4 Thực hiện tạo dựng dụng cụ đo góc có gắn tia chiếu laser.



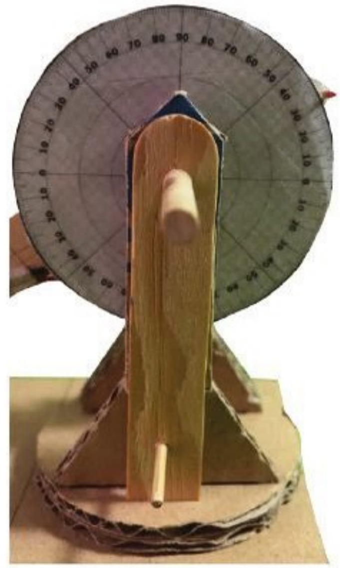
Hình 12. Dụng cụ đo góc có gắn tia chiếu laser

Tạo dựng các phần theo mô hình như *Hình 12*: phần đế, phần thân, phần biểu diễn góc, tia.

Thực hành đo góc



Bước 1



Bước 2

Bước 1. Quay đèn sao cho tia laser trùng với một cạnh của góc cần đo. Điều chỉnh bề mặt thước đo góc sao cho kim chỉ góc màu đỏ chỉ vào vị trí 0^{o}.

Bước 2. Giữ nguyên thước đo góc. Quay đèn sao cho tia laser trùng với cạnh thứ hai của góc cần đo. Kim chỉ góc màu đỏ chỉ vào số nào thì số đó là số đo của góc cần đo.

c) Tổng kết

5 Làm việc chung cả lớp.

- *Nhiệm vụ 1:* Các nhóm báo cáo kết quả.
- *Nhiệm vụ 2:* Tổng kết rút kinh nghiệm.

III. ĐÁNH GIÁ

Hình thức đánh giá: theo hình thức đánh giá của học tập dự án.

1. Đánh giá hoạt động cá nhân

- Mỗi cá nhân tự đánh giá vào phiếu cá nhân.
- Nhóm đánh giá từng thành viên trong nhóm vào phiếu đánh giá cá nhân.

2. Đánh giá hoạt động và sản phẩm của nhóm

- Nhóm tự đánh giá lại hoạt động của nhóm và cho điểm vào phiếu đánh giá hoạt động của nhóm.
- Giáo viên và các nhóm đánh giá rồi cho điểm phần trình bày của từng nhóm vào phiếu đánh giá hoạt động nhóm.

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH	TRANG
bảng biến thiên	bảng thể hiện chiều biến thiên (khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến) của một hàm số	36
bảng xét dấu	bảng thể hiện dấu của một biểu thức đại số trong các khoảng giá trị của ẩn	46
bất phương trình bậc hai một ẩn	bất phương trình dạng $ax^2 + bx + c < 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$), trong đó a, b, c là những số thực đã cho, $a \neq 0$	49
giá của vectơ	là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ	79
giải tam giác	là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên những dữ kiện cho trước	72
hai mệnh đề tương đương	hai mệnh đề P và Q mà mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng	8
hai vectơ bằng nhau	hai vectơ cùng hướng và cùng độ dài	81
hai vectơ cùng phương	hai vectơ có giá song song hoặc trùng nhau	80
hai vectơ đối nhau	hai vectơ ngược hướng và cùng độ dài	85
hàm số bậc hai	hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số, $a \neq 0$	39
miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn	phần mặt phẳng chứa các điểm có toạ độ thoả mãn bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong mặt phẳng toạ độ Oxy	22
tam thức bậc hai	đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$	44
tập xác định của hàm số	tập các giá trị của biến sao cho biểu thức của hàm số có nghĩa	32
tích vô hướng của hai vectơ	là một số thực được xác định bằng tích độ dài hai vectơ nhân côsin của góc giữa hai vectơ đó	93, 94
vectơ	là đoạn thẳng có hướng	79
vectơ-không	vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau	81

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
Địa chỉ: Tầng 6, Toà nhà số 128 đường Xuân Thuỷ, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.37547735
Email: nxb@hnue.edu.vn | **Website:** www.nxbdhsp.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc: NGUYỄN BÁ CƯỜNG
Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập: ĐỖ VIỆT HÙNG

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:
TẠ THỊ ÁNH – NGUYỄN THỊ NGÂN – ĐÀO ANH TIẾN
Thiết kế sách:
PHAN THỊ LƯƠNG
Trình bày bìa:
TRẦN TIỂU LÂM – PHAN THỊ LƯƠNG
Minh hoạ:
TRẦN THỊ HỒNG HẠNH
Sửa bản in:
LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY

TOÁN 10 - TẬP MỘT

Mã số:
ISBN: ....
In .... cuốn, khổ 19 x 26,5cm, tại ......
Địa chỉ: ....
Số xác nhận đăng kí xuất bản: ...-.../... /...-.../...
Quyết định xuất bản số: .... /....-... ngày ... /... /....
In xong và nộp lưu chiểu

Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống

Toán 10 là cuốn sách giáo khoa dành cho học sinh lớp 10, thuộc bộ sách giáo khoa “Cánh Diều”, thực hiện theo “Chương trình Giáo dục phổ thông 2018”.

Sách gồm hai tập và chuyên đề học tập được biên soạn đáp ứng yêu cầu phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh. Các hoạt động học tập được tổ chức theo tiến trình từ dễ đến khó, hướng đến việc khám phá, phát hiện, thực hành, vận dụng giải quyết vấn đề trong thực tiễn, phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh. Sách được trình bày hấp dẫn, khơi gợi sự tò mò, kích thích hứng thú, tạo dựng niềm tin trong học tập môn Toán ở học sinh.

Sách là sản phẩm tâm huyết của tập thể tác giả – những nhà giáo, nhà khoa học giàu kinh nghiệm trong giáo dục phổ thông.

SỬ DỤNG TEM CHỐNG GIẢ

1. Quét mã QR hoặc dùng trình duyệt web để truy cập website bộ sách Cánh Diều: www.hoc10.com
2. Vào mục Hướng dẫn (www.hoc10.com/huong-dan) để kiểm tra sách giả và xem hướng dẫn kích hoạt sử dụng học liệu điện tử.

SÁCH KHÔNG BÁN