

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

# HÌNH HỌC

# 10



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRẦN VĂN HẠO (Tổng Chủ biên)  
NGUYỄN MỘNG HY (Chủ biên)  
NGUYỄN VĂN ĐOÀN H – TRẦN ĐỨC HUYỀN

# HÌNH HỌC 10

(Tái bản lần thứ mười bốn)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng cho các em học sinh lớp sau!

## **Kí hiệu dùng trong sách**



Hoạt động của học sinh trên lớp

---

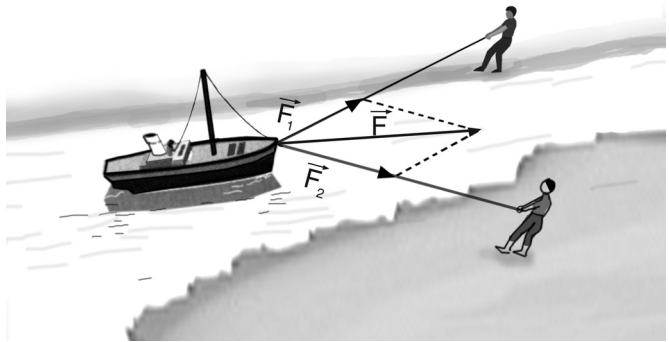
Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam – Bộ Giáo dục và Đào tạo

01-2020/CXBIPH/579-869/GD

Mã số : CH002t0

# VECTƠ

- ❖ Vectơ
- ❖ Tổng và hiệu của hai vectơ
- ❖ Tích của vectơ với một số
- ❖ Toạ độ của vectơ và toạ độ của điểm

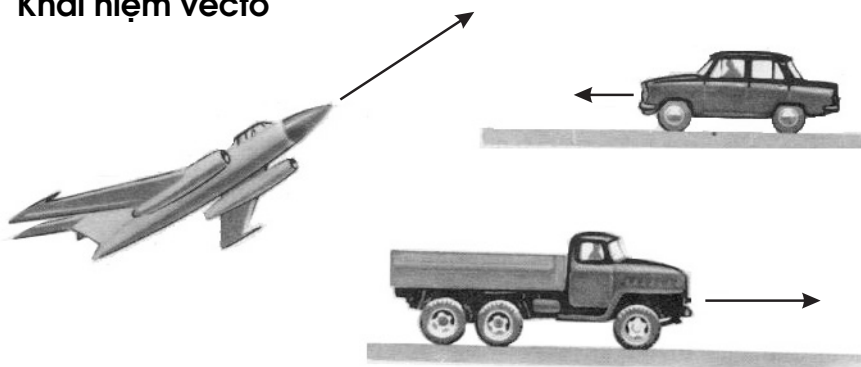


Trong vật lí ta thường gặp các đại lượng có hướng như lực, vận tốc, ... Người ta dùng vectơ để biểu diễn các đại lượng đó.



# §1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

## 1. Khái niệm vectơ



Hình 1.1

Các mũi tên trong hình 1.1 biểu diễn hướng chuyển động của ô tô và máy bay.

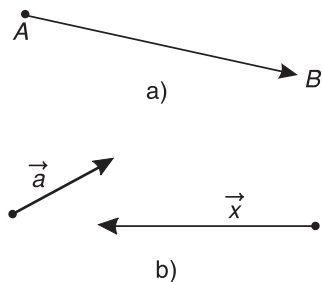
Cho đoạn thẳng  $AB$ . Nếu ta chọn điểm  $A$  làm *điểm đầu*, điểm  $B$  làm *điểm cuối* thì *đoạn thẳng*  $AB$  có hướng từ  $A$  đến  $B$ . Khi đó ta nói  $AB$  là một *đoạn thẳng có hướng*.

### **Định nghĩa**

*Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.*

Vectơ có điểm đầu  $A$ , điểm cuối  $B$  được kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$  và đọc là "vectơ  $AB$ ". Để vẽ vectơ  $\overrightarrow{AB}$  ta vẽ đoạn thẳng  $AB$  và đánh dấu mũi tên ở đầu mút  $B$  (h.1.2a).

Vectơ còn được kí hiệu là  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ , ... khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó (h.1.2b).



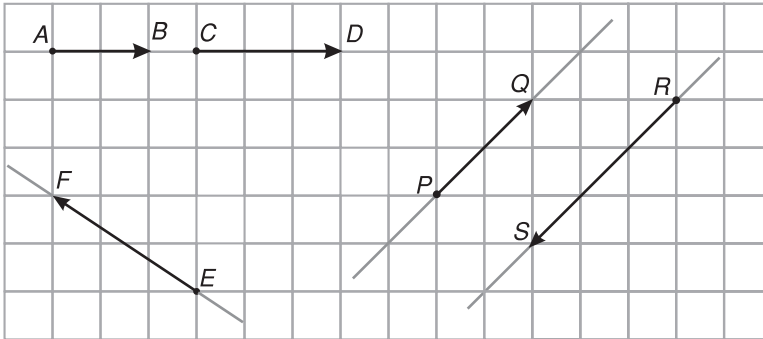
Hình 1.2

**⚠** Với hai điểm  $A, B$  phân biệt ta có được bao nhiêu vectơ có điểm đầu và điểm cuối là  $A$  hoặc  $B$ .

## 2. Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng

Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là *giá* của vectơ đó.

- 2 Hãy nhận xét về vị trí tương đối của các giá của các cặp vectơ sau :  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{PQ}$  và  $\overrightarrow{RS}$ ,  $\overrightarrow{EF}$  và  $\overrightarrow{PQ}$  (h.1.3).



Hình 1.3

### **Định nghĩa**

Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.


Trên hình 1.3, hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  cùng phương và có cùng hướng đi từ trái sang phải. Ta nói  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  là hai vectơ cùng hướng. Hai vectơ  $\overrightarrow{PQ}$  và  $\overrightarrow{RS}$  cùng phương nhưng có hướng ngược nhau. Ta nói hai vectơ  $\overrightarrow{PQ}$  và  $\overrightarrow{RS}$  là hai vectơ ngược hướng.

Như vậy, nếu hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

**Nhận xét.** Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương.

Thật vậy, nếu hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương thì hai đường thẳng  $AB$  và  $AC$  song song hoặc trùng nhau. Vì chúng có chung điểm  $A$  nên chúng phải trùng nhau. Vậy ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

Ngược lại, nếu ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng thì hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  có giá trị trùng nhau nên chúng cùng phương.

 **3** Khẳng định sau đúng hay sai :

Nếu ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng thì hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng hướng.

### 3. Hai vectơ bằng nhau

Mỗi vectơ có một *độ dài*, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Độ dài của  $\overrightarrow{AB}$  được kí hiệu là  $|\overrightarrow{AB}|$ , như vậy  $|\overrightarrow{AB}| = AB$ .

Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là *vectơ đơn vị*.

Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là *bằng nhau* nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài, kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ .

**Chú ý.** Khi cho trước vectơ  $\vec{a}$  và điểm  $O$ , thì ta luôn tìm được một điểm  $A$  duy nhất sao cho  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ .

 **4** Gọi  $O$  là tâm hình lục giác đều  $ABCDEF$ . Hãy chỉ ra các vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{OA}$ .

### 4. Vectơ - không

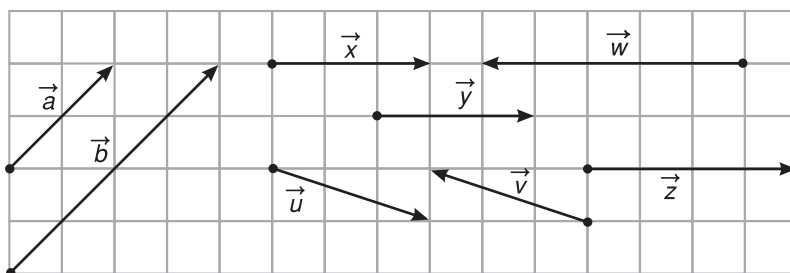
Ta biết rằng mỗi vectơ có một điểm đầu và một điểm cuối và hoàn toàn được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó.

Bây giờ với một điểm  $A$  bất kì ta quy ước có một *vectơ đặc biệt* mà điểm đầu và điểm cuối đều là  $A$ . Vectơ này được kí hiệu là  $\overrightarrow{AA}$  và gọi là *vectơ - không*.

Vectơ  $\overrightarrow{AA}$  nằm trên mọi đường thẳng đi qua  $A$ , vì vậy ta quy ước vectơ - không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ. Ta cũng quy ước rằng  $|\overrightarrow{AA}| = 0$ . Do đó có thể coi mọi vectơ - không đều bằng nhau. Ta kí hiệu vectơ - không là  $\vec{0}$ . Như vậy  $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$  với mọi điểm  $A, B, \dots$

## Câu hỏi và bài tập

- Cho ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Các khẳng định sau đúng hay sai ?
  - Nếu hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương với  $\vec{c}$  thì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.
  - Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng ngược hướng với  $\vec{c}$  thì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.
- Trong hình 1.4, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng và các vectơ bằng nhau.

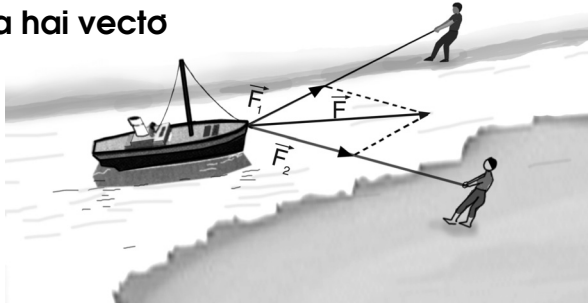


Hình 1.4

- Cho tứ giác  $ABCD$ . Chứng minh rằng tứ giác đó là hình bình hành khi và chỉ khi  $\vec{AB} = \vec{DC}$ .
- Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ .
  - Tìm các vectơ khác  $\vec{0}$  và cùng phương với  $\vec{OA}$  ;
  - Tìm các vectơ bằng vectơ  $\vec{AB}$  .

## §2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

### 1. Tổng của hai vectơ



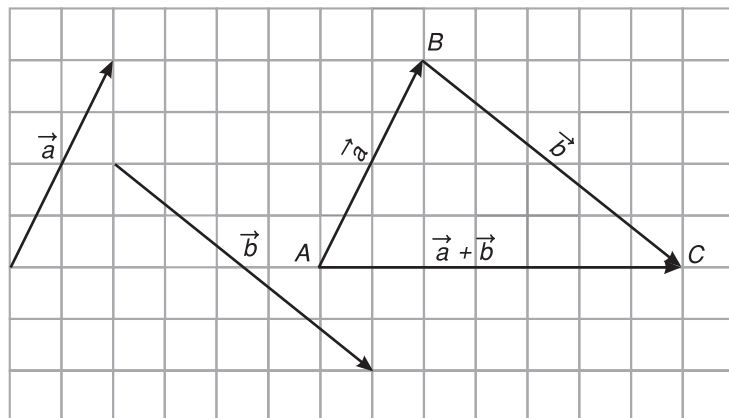
Hình 1.5

Trên hình 1.5, hai người đi dọc hai bên bờ kênh và cùng kéo một con thuyền với hai lực  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$ . Hai lực  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  tạo nên hợp lực  $\vec{F}$  là tổng của hai lực  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$ , làm thuyền chuyển động.

#### **Định nghĩa**

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Lấy một điểm  $A$  tùy ý, vẽ  $\vec{AB} = \vec{a}$  và  $\vec{BC} = \vec{b}$ . Vectơ  $\vec{AC}$  được gọi là **tổng** của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Ta kí hiệu tổng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là  $\vec{a} + \vec{b}$ . Vậy  $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$  (h.1.6).

Phép toán tìm tổng của hai vectơ còn được gọi là **phép cộng vectơ**.

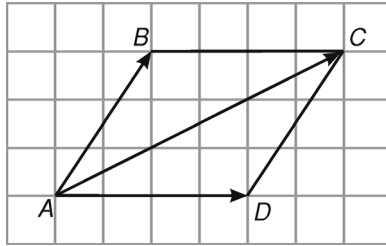


Hình 1.6



## 2. Quy tắc hình bình hành

Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ .



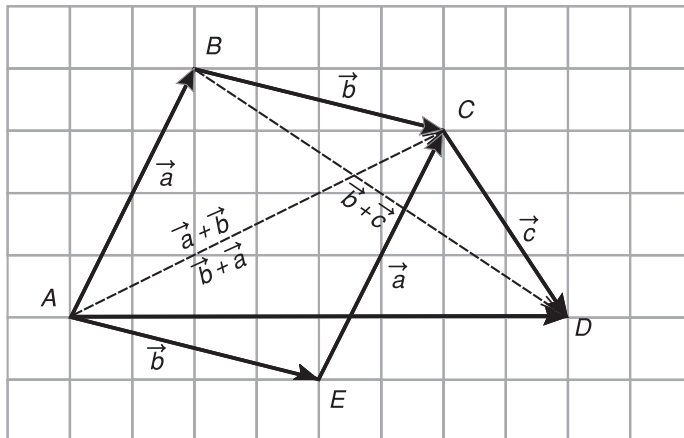
Hình 1.7

Trên hình 1.5, hợp lực của hai lực  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  là lực  $\vec{F}$  được xác định bằng quy tắc hình bình hành.

## 3. Tính chất của phép cộng các vectơ

Với ba vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  tùy ý ta có  
 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (tính chất giao hoán);  
 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  (tính chất kết hợp);  
 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  (tính chất của vectơ - không).

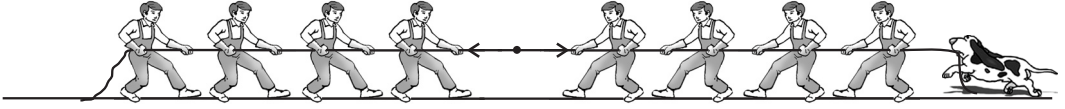
Hình 1.8 minh họa cho các tính chất trên.



Hình 1.8

 1 Hãy kiểm tra các tính chất của phép cộng trên hình 1.8.

#### 4. Hiệu của hai vectơ



##### a) Vectơ đối

**2** Vẽ hình bình hành  $ABCD$ . Hãy nhận xét về độ dài và hướng của hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$ .

Cho vectơ  $\vec{a}$ . Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với  $\vec{a}$  được gọi là vectơ đối của vectơ  $\vec{a}$ , kí hiệu là  $-\vec{a}$ .

Mỗi vectơ đều có vectơ đối, chẳng hạn vectơ đối của  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{BA}$ , nghĩa là  $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ .

Đặc biệt, vectơ đối của vectơ  $\vec{0}$  là vectơ  $\vec{0}$ .

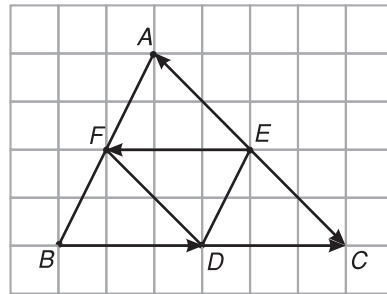


**Ví dụ 1.** Nếu  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$  của tam giác  $ABC$  (h.1.9), khi đó ta có

$$\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{DC},$$

$$\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{EF},$$

$$\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{EC}.$$



Hình 1.9

**3** Cho  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ . Hãy chứng tỏ  $\overrightarrow{BC}$  là vectơ đối của  $\overrightarrow{AB}$ .

##### b) Định nghĩa hiệu của hai vectơ

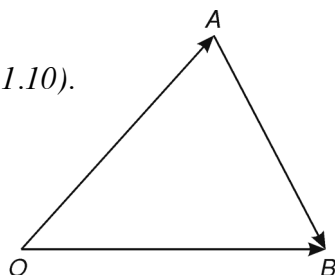
Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Ta gọi hiệu của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là vectơ  $\vec{a} + (-\vec{b})$ , kí hiệu  $\vec{a} - \vec{b}$ .

Như vậy

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Từ định nghĩa hiệu của hai vectơ, suy ra

Với ba điểm  $O, A, B$  tùy ý ta có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$  (h.1.10).



Hình 1.10

**4** Hãy giải thích vì sao hiệu của hai vectơ  $\overrightarrow{OB}$  và  $\overrightarrow{OA}$  là vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

**Chú ý.** 1) Phép toán tìm hiệu của hai vectơ còn được gọi là *phép trừ vectơ*.

2) Với ba điểm tùy ý  $A, B, C$  ta luôn có :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ (quy tắc ba điểm) ;}$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \text{ (quy tắc trừ).}$$

Thực chất hai quy tắc trên được suy ra từ phép cộng vectơ.



**Ví dụ 2.** Với bốn điểm bất kì  $A, B, C, D$  ta luôn có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

Thật vậy, lấy một điểm  $O$  tùy ý ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

## 5. Áp dụng

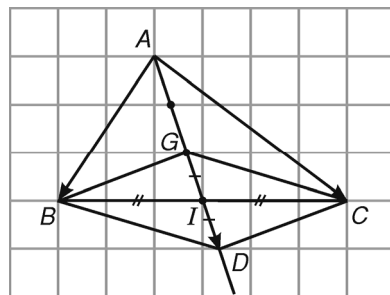
a) Điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

b) Điểm  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

CHỨNG MINH

b) Trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  nằm trên trung tuyến  $AI$ . Lấy  $D$  là điểm đối xứng với  $G$  qua  $I$ . Khi đó  $BGCD$  là hình bình hành và  $G$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AD$ . Suy ra  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$  và  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ . Ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$



Hình 1.11

Ngược lại, giả sử  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ . Vẽ hình bình hành  $BGCD$  có  $I$  là giao điểm của hai đường chéo. Khi đó  $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GD}$ , suy ra  $\vec{GA} + \vec{GD} = \vec{0}$  nên  $G$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AD$ . Do đó ba điểm  $A, G, I$  thẳng hàng,  $GA = 2GI$ , điểm  $G$  nằm giữa  $A$  và  $I$ . Vậy  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

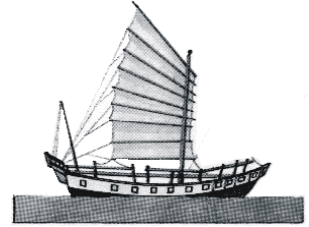
## Câu hỏi và bài tập

- Cho đoạn thẳng  $AB$  và điểm  $M$  nằm giữa  $A$  và  $B$  sao cho  $AM > MB$ . Vẽ các vectơ  $\vec{MA} + \vec{MB}$  và  $\vec{MA} - \vec{MB}$ .
- Cho hình bình hành  $ABCD$  và một điểm  $M$  tùy ý. Chứng minh rằng  $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$ .
- Chứng minh rằng đối với tứ giác  $ABCD$  bất kì ta luôn có
  - $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$  ;
  - $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD}$  .
- Cho tam giác  $ABC$ . Bên ngoài của tam giác vẽ các hình bình hành  $ABIJ$ ,  $BCPQ$ ,  $CARS$ . Chứng minh rằng  $\vec{RJ} + \vec{IQ} + \vec{PS} = \vec{0}$ .
- Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng  $a$ . Tính độ dài của các vectơ  $\vec{AB} + \vec{BC}$  và  $\vec{AB} - \vec{BC}$ .
- Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Chứng minh rằng
  - $\vec{CO} - \vec{OB} = \vec{BA}$  ;
  - $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{DB}$  ;
  - $\vec{DA} - \vec{DB} = \vec{OD} - \vec{OC}$  ;
  - $\vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$  .
- Cho  $\vec{a}, \vec{b}$  là hai vectơ khác  $\vec{0}$ . Khi nào có đẳng thức
  - $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$  ;
  - $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$  .
- Cho  $|\vec{a} + \vec{b}| = 0$ . So sánh độ dài, phương và hướng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- Chứng minh rằng  $\vec{AB} = \vec{CD}$  khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng  $AD$  và  $BC$  trùng nhau.
- Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$  và  $\vec{F}_3 = \vec{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều là 100 N và  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Tìm cường độ và hướng của lực  $\vec{F}_3$ .



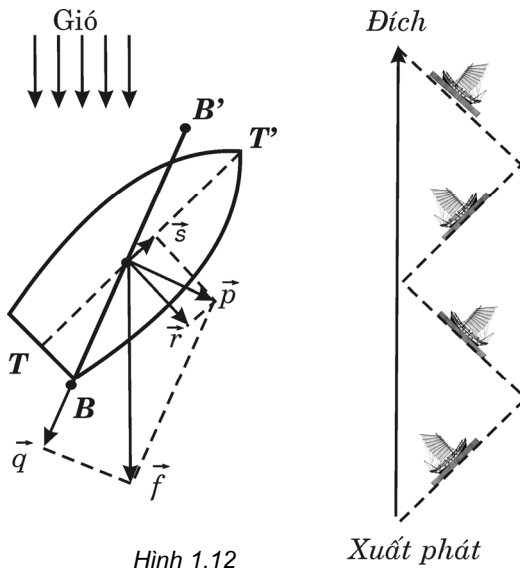
## Thuyền buồm chạy ngược chiều gió

Thông thường người ta vẫn nghĩ rằng gió thổi về hướng nào thì sẽ đẩy thuyền buồm về hướng đó. Trong thực tế con người đã nghiên cứu tìm cách lợi dụng sức gió làm cho thuyền buồm chạy ngược chiều gió. Vậy người ta đã làm như thế nào để thực hiện được điều tưởng chừng như vô lí đó ?



Nói một cách chính xác thì người ta có thể làm cho thuyền chuyển động theo một góc nhọn, gần bằng  $\frac{1}{2}$  góc vuông đối với chiều gió thổi. Chuyển động này được thực hiện theo đường đích dắc nhằm tới hướng cần đến của mục tiêu.

Để làm được điều đó ta đặt thuyền theo hướng  $TT'$  và đặt buồm theo phương  $BB'$  như hình vẽ.




Khi đó gió thổi tác động lên mặt buồm một lực. Tổng hợp lực là lực  $\vec{f}$  có điểm đặt ở chính giữa buồm. Lực  $\vec{f}$  được phân tích thành hai lực : lực  $\vec{p}$  vuông góc với cánh buồm  $BB'$  và lực  $\vec{q}$  theo chiều dọc cánh buồm. Ta có  $\vec{f} = \vec{p} + \vec{q}$ . Lực  $\vec{q}$  này không đẩy buồm đi đâu cả vì lực cản của gió đối với buồm không đáng kể. Lúc đó chỉ còn lực  $\vec{p}$  đẩy buồm dưới một góc vuông. Như vậy khi có gió thổi, luôn luôn có một lực  $\vec{p}$  vuông góc với mặt phẳng  $BB'$  của buồm. Lực  $\vec{p}$  này được phân tích thành lực  $\vec{r}$  vuông

góc với sống thuyền và lực  $\vec{s}$  dọc theo sống thuyền  $TT'$  hướng về mũi thuyền. Khi đó ta có  $\vec{p} = \vec{s} + \vec{r}$ . Lực  $\vec{r}$  rất nhỏ so với sức cản rất lớn của nước, do thuyền buồm có sống thuyền rất sâu. Chỉ còn lực  $\vec{s}$  hướng về phía trước dọc theo sống thuyền đẩy thuyền đi một góc nhọn ngược với chiều gió thổi. Bằng cách đổi hướng thuyền theo con đường đích dắc, thuyền có thể đi tới đích theo hướng ngược chiều gió mà không cần lực đẩy.



### §3. TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

 Cho vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Xác định độ dài và hướng của vectơ  $\vec{a} + \vec{a}$ .

1.

#### **Định nghĩa**

Cho số  $k \neq 0$  và vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Tích của vectơ  $\vec{a}$  với số  $k$  là một vectơ, kí hiệu là  $k\vec{a}$ , cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ , ngược hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$  và có độ dài bằng  $|k||\vec{a}|$ .

Ta quy ước  $0\vec{a} = \vec{0}$ ,  $k\vec{0} = \vec{0}$ .

Người ta còn gọi tích của vectơ với một số là *tích của một số với một vectơ*.

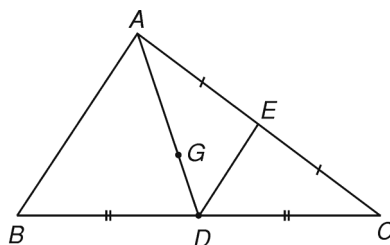


**Ví dụ 1.** Cho  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ ,  $D$  và  $E$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AC$ . Khi đó ta có (h1.13)

$$\vec{GA} = (-2)\vec{GD},$$

$$\vec{AD} = 3\vec{GD},$$

$$\vec{DE} = \left(-\frac{1}{2}\right)\vec{AB}.$$



Hình 1.13

#### 2. Tính chất


Với hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bất kì, với mọi số  $h$  và  $k$ , ta có

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b};$$

$$(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a};$$

$$h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a};$$

$$1.\vec{a} = \vec{a}, (-1).\vec{a} = -\vec{a}.$$

 Tìm vectơ đối của các vectơ  $k\vec{a}$  và  $3\vec{a} - 4\vec{b}$ .

### 3. Trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

a) Nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì với mọi điểm  $M$  ta có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ .

b) Nếu  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì với mọi điểm  $M$  ta có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .



Hãy sử dụng mục 5 của §2 để chứng minh các khẳng định trên.

### 4. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b} \neq \vec{0}$ ) cùng phương là có một số  $k$  để  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

Thật vậy, nếu  $\vec{a} = k\vec{b}$  thì hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.

Ngược lại, giả sử  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương. Ta lấy  $k = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$  nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng

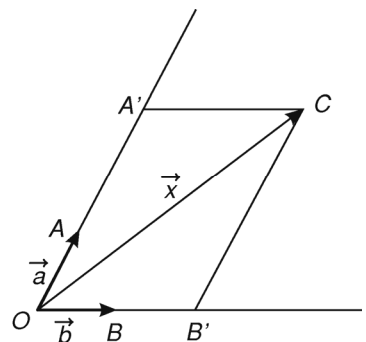
hướng và lấy  $k = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$  nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng. Khi đó ta có  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

**Nhận xét.** Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi có số  $k$  khác 0 để  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ .

### 5. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Cho  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  là hai vectơ không cùng phương và  $\vec{x} = \overrightarrow{OC}$  là một vectơ tùy ý. Kẻ  $CA' \parallel OB$  và  $CB' \parallel OA$  (h. 1.14). Khi đó  $\vec{x} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$ . Vì  $\overrightarrow{OA'}$  và  $\vec{a}$  là hai vectơ cùng phương nên có số  $h$  để  $\overrightarrow{OA'} = h\vec{a}$ . Vì  $\overrightarrow{OB'}$  và  $\vec{b}$  cùng phương nên có số  $k$  để  $\overrightarrow{OB'} = k\vec{b}$ .

Vậy  $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$ .



Hình 1.14

Khi đó ta nói vectơ  $\vec{x}$  được phân tích (hay còn được gọi là *biểu thị*) theo hai vectơ không cùng phương  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

Một cách tổng quát người ta chứng minh được mệnh đề quan trọng sau đây :

*Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Khi đó mọi vectơ  $\vec{x}$  đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , nghĩa là có duy nhất cặp số  $h, k$  sao cho  $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$ .*

Bài toán sau cho ta cách phân tích trong một số trường hợp cụ thể.



**Bài toán.** Cho tam giác  $ABC$  với trọng tâm  $G$ . Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn

$AG$  và  $K$  là điểm trên cạnh  $AB$  sao cho  $AK = \frac{1}{5}AB$ .

- Hãy phân tích  $\vec{AI}, \vec{AK}, \vec{CI}, \vec{CK}$  theo  $\vec{a} = \vec{CA}, \vec{b} = \vec{CB}$ ;
- Chứng minh ba điểm  $C, I, K$  thẳng hàng.

*GIẢI*

a) Gọi  $AD$  là trung tuyến của tam giác  $ABC$  (h. 1.15). Ta có

$$\vec{AD} = \vec{CD} - \vec{CA} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}.$$

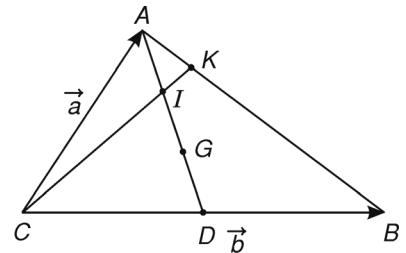
Do đó

$$\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AD} = \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a};$$

$$\vec{AK} = \frac{1}{5}\vec{AB} = \frac{1}{5}(\vec{CB} - \vec{CA}) = \frac{1}{5}(\vec{b} - \vec{a});$$

$$\vec{CI} = \vec{CA} + \vec{AI} = \vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a};$$

$$\vec{CK} = \vec{CA} + \vec{AK} = \vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} - \frac{1}{5}\vec{a} = \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{4}{5}\vec{a}.$$



Hình 1.15

b) Từ tính toán trên ta có  $\vec{CK} = \frac{6}{5}\vec{CI}$ . Vậy ba điểm  $C, I, K$  thẳng hàng.

## Câu hỏi và bài tập

1. Cho hình bình hành  $ABCD$ . Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}.$$

2. Cho  $AK$  và  $BM$  là hai trung tuyến của tam giác  $ABC$ . Hãy phân tích các vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CA}$  theo hai vectơ  $\vec{u} = \overrightarrow{AK}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{BM}$ .

3. Trên đường thẳng chứa cạnh  $BC$  của tam giác  $ABC$  lấy một điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$ . Hãy phân tích vectơ  $\overrightarrow{AM}$  theo hai vectơ  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  và  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

4. Gọi  $AM$  là trung tuyến của tam giác  $ABC$  và  $D$  là trung điểm của đoạn  $AM$ . Chứng minh rằng

a)  $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$  ;

b)  $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD}$ , với  $O$  là điểm tùy ý.

5. Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB$  và  $CD$  của tứ giác  $ABCD$ . Chứng minh rằng :

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.$$

6. Cho hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ . Tìm điểm  $K$  sao cho

$$3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}.$$

7. Cho tam giác  $ABC$ . Tìm điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

8. Cho lục giác  $ABCDEF$ . Gọi  $M, N, P, Q, R, S$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CD, DE, EF, FA$ . Chứng minh rằng hai tam giác  $MPR$  và  $NQS$  có cùng trọng tâm.

9. Cho tam giác đều  $ABC$  có  $O$  là trọng tâm và  $M$  là một điểm tùy ý trong tam giác. Gọi  $D, E, F$  lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ  $M$  đến  $BC, AC, AB$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$



## Tỉ lệ vàng

Ơ-clit (*Euclide*), nhà toán học của mọi thời đại đã từng nói đến “tỉ lệ vàng” trong tác phẩm bất hủ của ông mang tên “Những nguyên tắc cơ bản”. Theo Ơ-clit, điểm  $I$  trên đoạn  $AB$  được gọi là điểm *chia đoạn  $AB$  theo tỉ lệ vàng* nếu thoả mãn

$$\frac{AI}{IB} = \frac{AB}{AI} \quad (1)$$



Hình 1.16

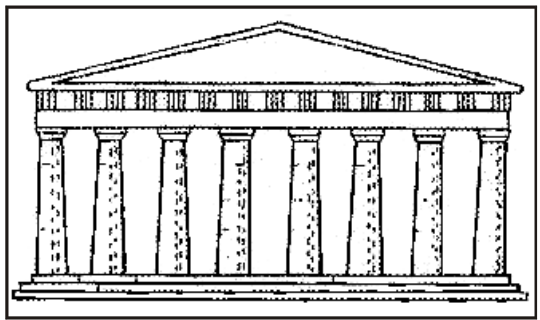
Đặt  $x = \frac{AI}{IB} = \frac{AB}{AI}$  ta có  $\overline{AB} = x\overline{AI}$  và  $\overline{AI} = x\overline{IB}$ . Số  $x$  đó được gọi là *tỉ lệ vàng* và điểm  $I$  được gọi là *điểm vàng* của đoạn  $AB$ .

Để tính  $x$ , ta có thể đặt  $IB = 1$ . Từ (1) ta có

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}, \quad \text{hay} \quad x^2 - x - 1 = 0,$$

tức là  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803$ .

Với tỉ lệ vàng người ta có thể tạo nên một hình chữ nhật đẹp, cân đối và gây hứng thú cho nhiều nhà hội họa kiến trúc. Ví dụ, khi đến tham quan đền Pác-tê-nông ở A-ten (Hi Lạp) người ta thấy kích thước các hình hình học trong đền phần lớn chịu ảnh hưởng của tỉ lệ vàng. Nhà tâm lí học người Đức Phít-nê (*Fichner*) đã quan sát và đo hàng nghìn đồ vật thường dùng trong đời sống như ô cửa sổ, trang giấy viết, bìa sách... và so sánh kích thước giữa chiều dài và chiều ngang của chúng thì thấy tỉ số gần bằng tỉ lệ vàng.



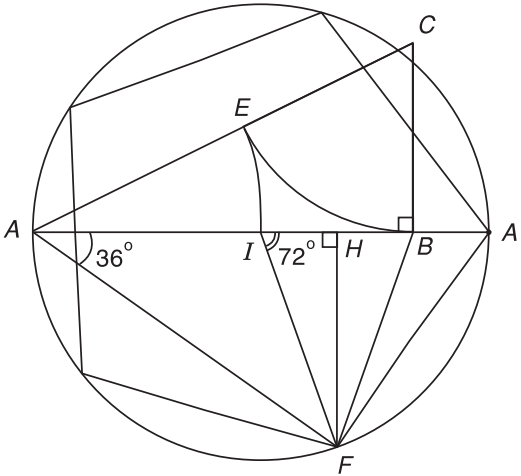
Hình 1.17. Đền Pác-tê-nông và đường nét kiến trúc của nó.



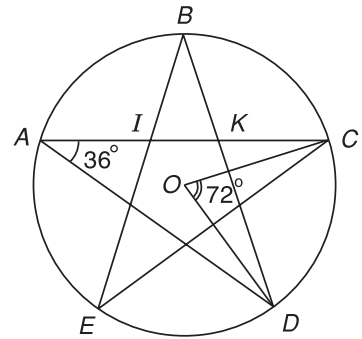
Để dựng điểm vàng  $I$  của đoạn  $AB = a$  ta làm như sau :

Vẽ tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ , với  $BC = \frac{a}{2}$ . Đường tròn tâm  $C$  bán kính  $\frac{a}{2}$  cắt  $AC$  tại  $E$ . Đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AE$  cắt  $AB$  tại  $I$ .

Ta có  $AC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$  và  $AE = AI = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ . Do đó  $\frac{AB}{AI} = \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ .



Hình 1.18



Hình 1.19

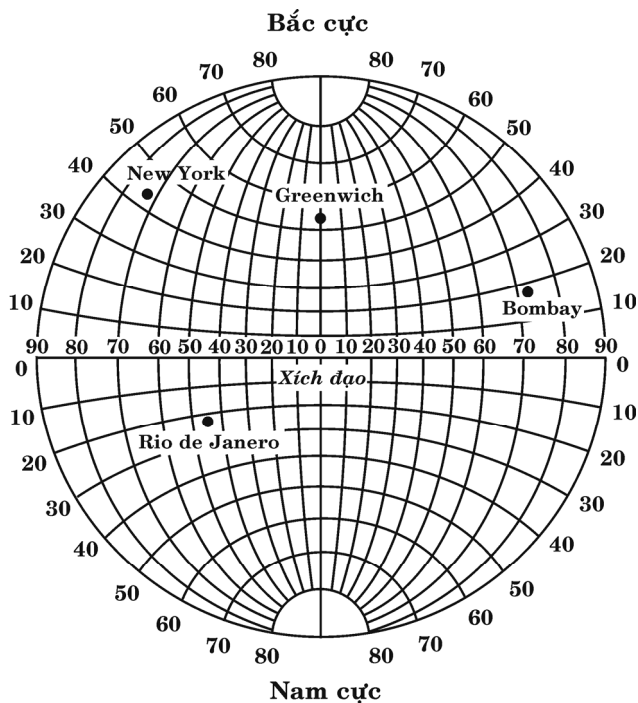
Sử dụng điểm vàng  $I$  ta có thể dựng được góc  $72^\circ$ , từ đó dựng được ngũ giác đều cũng như ngôi sao năm cánh như sau :

Ta dựng đường tròn tâm  $I$  bán kính  $IA$  cắt trung trực của  $IB$  tại  $F$  ta được  $\widehat{FAB} = 36^\circ$  và  $\widehat{ABF} = 72^\circ$  (h.1.18).

Một ngũ giác đều nội tiếp đường tròn trên có hai đỉnh liên tiếp là  $F$  và điểm xuyên tâm đối  $A'$  của  $A$ . Từ đó ta dựng được ngay ba đỉnh còn lại của ngũ giác đều.

Cần lưu ý rằng trên ngôi sao năm cánh trong hình 1.19 thì tỉ số  $\frac{AI}{IK} = \frac{AK}{AI}$  chính là tỉ lệ vàng. Ngôi sao vàng năm cánh của Quốc kì nước ta được dựng theo tỉ số này.

## §4. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ



Với mỗi cặp số chỉ kinh độ và vĩ độ người ta xác định được một điểm trên Trái Đất.

### 1. Trục và độ dài đại số trên trục

a) *Trục tọa độ* (hay gọi tắt là *trục*) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm  $O$  gọi là *điểm gốc* và một vectơ đơn vị  $\vec{e}$ .

Ta kí hiệu trục đó là  $(O; \vec{e})$  (h.1.20)



Hình 1.20

b) Cho  $M$  là một điểm tùy ý trên trục  $(O; \vec{e})$ . Khi đó có duy nhất một số  $k$  sao cho  $\overrightarrow{OM} = k\vec{e}$ . Ta gọi số  $k$  đó là *tọa độ* của điểm  $M$  đối với trục đã cho.

c) Cho hai điểm  $A$  và  $B$  trên trục  $(O ; \vec{e})$ . Khi đó có duy nhất số  $a$  sao cho  $\overrightarrow{AB} = a\vec{e}$ . Ta gọi số  $a$  đó là *độ dài đại số của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  đối với trục đã cho* và kí hiệu  $a = \overline{AB}$ .

**Nhận xét.** Nếu  $\overrightarrow{AB}$  cùng hướng với  $\vec{e}$  thì  $\overline{AB} = AB$ , còn nếu  $\overrightarrow{AB}$  ngược hướng với  $\vec{e}$  thì  $\overline{AB} = -AB$ .

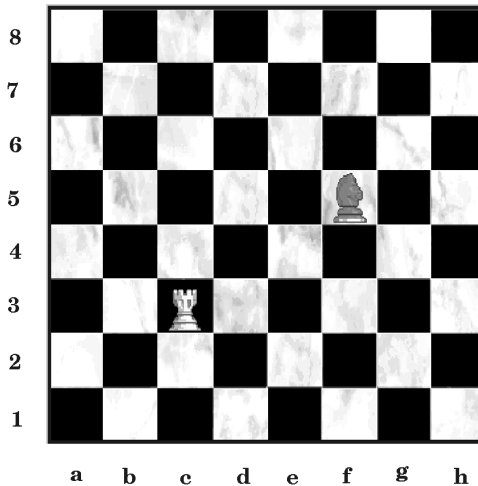
Nếu hai điểm  $A$  và  $B$  trên trục  $(O ; \vec{e})$  có tọa độ lần lượt là  $a$  và  $b$  thì  $\overline{AB} = b - a$ .

## 2. Hệ trục tọa độ

Trong mục này ta sẽ xây dựng khái niệm hệ trục tọa độ để xác định vị trí của điểm và của vectơ trên mặt phẳng.



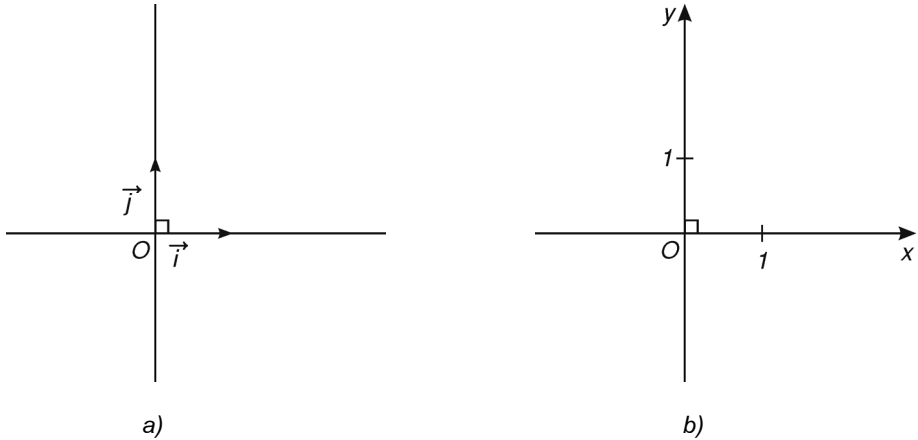
1 Hãy tìm cách xác định vị trí quân xe và quân mã trên bàn cờ vua (h.1.21)



Hình 1.21

### a) Định nghĩa

**Hệ trục tọa độ**  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  gồm hai trục  $(O ; \vec{i})$  và  $(O ; \vec{j})$  vuông góc với nhau. Điểm gốc  $O$  chung của hai trục gọi là **gốc tọa độ**. Trục  $(O ; \vec{i})$  được gọi là **trục hoành** và kí hiệu là  $Ox$ , trục  $(O ; \vec{j})$  được gọi là **trục tung** và kí hiệu là  $Oy$ . Các vectơ  $\vec{i}$  và  $\vec{j}$  là các vectơ đơn vị trên  $Ox$  và  $Oy$  và  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ . Hệ trục tọa độ  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  còn được kí hiệu là  $Oxy$  (h.1.22)

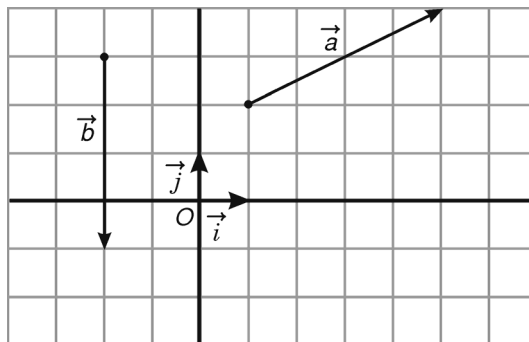


Hình 1.22

Mặt phẳng mà trên đó đã cho một hệ trục tọa độ  $Oxy$  được gọi là *mặt phẳng tọa độ  $Oxy$*  hay gọi tắt là *mặt phẳng  $Oxy$* .

**b) Tọa độ của vectơ**

 2 Hãy phân tích các vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  theo hai vectơ  $\vec{i}$  và  $\vec{j}$  trong hình (h.1.23)



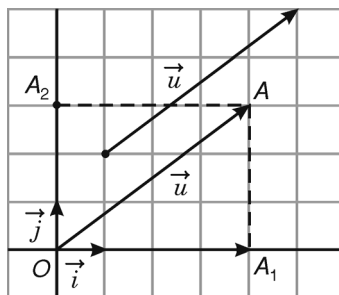
Hình 1.23

Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho một vectơ  $\vec{u}$  tùy ý. Vẽ  $\vec{OA} = \vec{u}$  và gọi  $A_1$ ,  $A_2$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $Ox$  và  $Oy$  (h.1.24). Ta có  $\vec{OA} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2}$  và cặp số duy nhất  $(x; y)$  để  $\vec{OA_1} = x\vec{i}$ ,  $\vec{OA_2} = y\vec{j}$ . Như vậy  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

Cặp số  $(x ; y)$  duy nhất đó được gọi là *toa độ của vectơ*  $\vec{u}$  đối với hệ toạ độ  $Oxy$  và viết  $\vec{u} = (x ; y)$  hoặc  $\vec{u}(x ; y)$ . Số thứ nhất  $x$  gọi là *hoành độ*, số thứ hai  $y$  gọi là *tung độ* của vectơ  $\vec{u}$ .

Như vậy

$$\vec{u} = (x ; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



Hình 1.24

**Nhận xét.** Từ định nghĩa toạ độ của vectơ, ta thấy hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.

Nếu  $\vec{u} = (x ; y)$ ,  $\vec{u}' = (x' ; y')$  thì

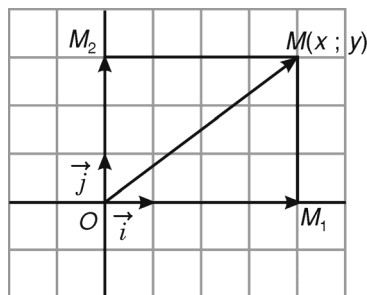
$$\vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Như vậy, mỗi vectơ được hoàn toàn xác định khi biết toạ độ của nó.

### c) Toạ độ của một điểm

Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$  cho một điểm  $M$  tùy ý. Toạ độ của vectơ  $\vec{OM}$  đối với hệ trục  $Oxy$  được gọi là *toa độ của điểm*  $M$  đối với hệ trục đó (h.1.25).

Như vậy, cặp số  $(x ; y)$  là toạ độ của điểm  $M$  khi và chỉ khi  $\vec{OM} = (x ; y)$ . Khi đó ta viết  $M(x ; y)$  hoặc  $M = (x ; y)$ . Số  $x$  được gọi là *hoành độ*, còn số  $y$  được gọi là *tung độ* của điểm  $M$ . Hoành độ của điểm  $M$  còn được kí hiệu là  $x_M$ , tung độ của điểm  $M$  còn được kí hiệu là  $y_M$ .

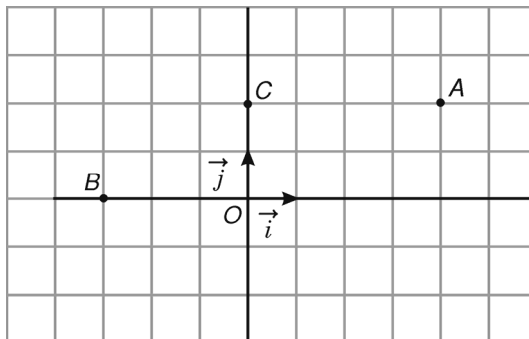


Hình 1.25

$$M = (x ; y) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Chú ý rằng, nếu  $MM_1 \perp Ox$ ,  $MM_2 \perp Oy$  thì  $x = \vec{OM}_1$ ,  $y = \vec{OM}_2$ .

- 3** Tìm tọa độ của các điểm  $A, B, C$  trong hình 1.26. Cho ba điểm  $D(-2 ; 3), E(0 ; -4), F(3 ; 0)$ . Hãy vẽ các điểm  $D, E, F$  trên mặt phẳng  $Oxy$ .



Hình 1.26

**d) Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vector trong mặt phẳng**

Cho hai điểm  $A(x_A ; y_A)$  và  $B(x_B ; y_B)$ . Ta có

$$\vec{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A).$$

- 4** Hãy chứng minh công thức trên.

### 3. Tọa độ của các vector $\vec{u} + \vec{v}$ , $\vec{u} - \vec{v}$ , $k\vec{u}$

Ta có các công thức sau :

Cho  $\vec{u} = (u_1 ; u_2)$ ,  $\vec{v} = (v_1 ; v_2)$ . Khi đó :

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1 ; u_2 + v_2) ;$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1 ; u_2 - v_2) ;$$

$$k\vec{u} = (ku_1 ; ku_2), k \in \mathbb{R}.$$



**Ví dụ 1.** Cho  $\vec{a} = (1; -2)$ ,  $\vec{b} = (3; 4)$ ,  $\vec{c} = (5; -1)$ . Tìm tọa độ vectơ  $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ .

Ta có  $2\vec{a} = (2; -4)$ ,  $2\vec{a} + \vec{b} = (5; 0)$ ,  $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (0; 1)$ .

Vậy  $\vec{u} = (0; 1)$ .



**Ví dụ 2.** Cho  $\vec{a} = (1; -1)$ ,  $\vec{b} = (2; 1)$ . Hãy phân tích vectơ  $\vec{c} = (4; -1)$  theo  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

Giả sử  $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b} = (k + 2h; -k + h)$

Ta có  $\begin{cases} k + 2h = 4 \\ -k + h = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ h = 1. \end{cases}$

Vậy  $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ .

**Nhận xét.** Hai vectơ  $\vec{u} = (u_1; u_2)$ ,  $\vec{v} = (v_1; v_2)$  với  $\vec{v} \neq \vec{0}$  cùng phương khi và chỉ khi có một số  $k$  sao cho  $u_1 = kv_1$  và  $u_2 = kv_2$ .

#### 4. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng. Tọa độ của trọng tâm tam giác

a) Cho đoạn thẳng  $AB$  có  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$ . Ta dễ dàng chứng minh được tọa độ trung điểm  $I(x_I; y_I)$  của đoạn thẳng  $AB$  là :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$



5. Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Hãy phân tích vectơ  $\vec{OG}$  theo ba vectơ  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  và  $\vec{OC}$ . Từ đó hãy tính tọa độ của  $G$  theo tọa độ của  $A$ ,  $B$  và  $C$ .

b) Cho tam giác  $ABC$  có  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$ ,  $C(x_C; y_C)$ . Khi đó tọa độ của trọng tâm  $G(x_G; y_G)$  của tam giác  $ABC$  được tính theo công thức :

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$



**Ví dụ.** Cho  $A(2 ; 0)$ ,  $B(0 ; 4)$ ,  $C(1 ; 3)$ . Tìm toạ độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$  và toạ độ của trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

$$\text{Ta có} \quad x_I = \frac{2+0}{2} = 1, \quad y_I = \frac{0+4}{2} = 2 ;$$

$$x_G = \frac{2+0+1}{3} = 1, \quad y_G = \frac{0+4+3}{3} = \frac{7}{3}.$$

## Câu hỏi và bài tập

- Trên trục  $(O ; \vec{e})$  cho các điểm  $A, B, M, N$  có toạ độ lần lượt là  $-1, 2, 3, -2$ .
  - Hãy vẽ trục và biểu diễn các điểm đã cho trên trục ;
  - Tính độ dài đại số của  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{MN}$ . Từ đó suy ra hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{MN}$  ngược hướng.
- Trong mặt phẳng toạ độ các mệnh đề sau đúng hay sai ?
  - $\vec{a} = (-3 ; 0)$  và  $\vec{i} = (1 ; 0)$  là hai vectơ ngược hướng ;
  - $\vec{a} = (3 ; 4)$  và  $\vec{b} = (-3 ; -4)$  là hai vectơ đối nhau ;
  - $\vec{a} = (5 ; 3)$  và  $\vec{b} = (3 ; 5)$  là hai vectơ đối nhau ;
  - Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.
- Tìm toạ độ của các vectơ sau :
 

a) $\vec{a} = 2\vec{i}$ ;	b) $\vec{b} = -3\vec{j}$ ;
c) $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ ;	d) $\vec{d} = 0,2\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ .
- Trong mặt phẳng  $Oxy$ . Các khẳng định sau đúng hay sai ?
  - Toạ độ của điểm  $A$  là toạ độ của vectơ  $\overrightarrow{OA}$  ;
  - Điểm  $A$  nằm trên trục hoành thì có tung độ bằng 0 ;
  - Điểm  $A$  nằm trên trục tung thì có hoành độ bằng 0 ;
  - Hoành độ và tung độ của điểm  $A$  bằng nhau khi và chỉ khi  $A$  nằm trên tia phân giác của góc phần tư thứ nhất.



5. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho điểm  $M(x_0; y_0)$ .
  - a) Tìm tọa độ của điểm  $A$  đối xứng với  $M$  qua trục  $Ox$ ;
  - b) Tìm tọa độ của điểm  $B$  đối xứng với  $M$  qua trục  $Oy$ ;
  - c) Tìm tọa độ điểm  $C$  đối xứng với  $M$  qua gốc  $O$ .
6. Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $A(-1; -2)$ ,  $B(3; 2)$ ,  $C(4; -1)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $D$ .
7. Các điểm  $A'(-4; 1)$ ,  $B'(2; 4)$  và  $C'(2; -2)$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC$ ,  $CA$  và  $AB$  của tam giác  $ABC$ . Tính tọa độ các đỉnh của tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng trọng tâm của các tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  trùng nhau.
8. Cho  $\vec{a} = (2; -2)$ ,  $\vec{b} = (1; 4)$ . Hãy phân tích vectơ  $\vec{c} = (5; 0)$  theo hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

## ÔN TẬP CHƯƠNG I

### I. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ . Hãy chỉ ra các vectơ bằng  $\overrightarrow{AB}$  có điểm đầu và điểm cuối là  $O$  hoặc các đỉnh của lục giác.
2. Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$ . Các khẳng định sau đúng hay sai?
  - a) Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng thì cùng phương;
  - b) Hai vectơ  $\vec{b}$  và  $k\vec{b}$  cùng phương;
  - c) Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $(-2)\vec{a}$  cùng hướng;
  - d) Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng với vectơ thứ ba khác  $\vec{0}$  thì cùng phương.
3. Tứ giác  $ABCD$  là hình gì nếu  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  và  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ .
4. Chứng minh rằng  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .
5. Cho tam giác đều  $ABC$  nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ . Hãy xác định các điểm  $M, N, P$  sao cho
  - a)  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ;
  - b)  $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ;
  - c)  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$ .
6. Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính
  - a)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ ;
  - b)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ .

7. Cho sáu điểm  $M, N, P, Q, R, S$  bất kì. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{RQ}.$$

8. Cho tam giác  $OAB$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $OA$  và  $OB$ . Tìm các số  $m, n$  sao cho

a)  $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$  ;

b)  $\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$  ;

c)  $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$  ;

d)  $\overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ .

9. Chứng minh rằng nếu  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  thì  $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$ .

10. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , các khẳng định sau đúng hay sai ?

a) Hai vectơ đối nhau thì chúng có hoành độ đối nhau ;

b) Vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$  cùng phương với vectơ  $\vec{i}$  nếu  $\vec{a}$  có hoành độ bằng 0 ;

c) Vectơ  $\vec{a}$  có hoành độ bằng 0 thì cùng phương với vectơ  $\vec{j}$ .

11. Cho  $\vec{a} = (2 ; 1)$ ,  $\vec{b} = (3 ; -4)$ ,  $\vec{c} = (-7 ; 2)$ .

a) Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$  ;

b) Tìm tọa độ vectơ  $\vec{x}$  sao cho  $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$  ;

c) Tìm các số  $k$  và  $h$  sao cho  $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$ .

12. Cho  $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ ,  $\vec{v} = m\vec{i} - 4\vec{j}$ .

Tìm  $m$  để  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương.

13. Trong các khẳng định sau khẳng định nào là đúng ?

a) Điểm  $A$  nằm trên trục hoành thì có hoành độ bằng 0 ;

b)  $P$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi hoành độ của  $P$  bằng trung bình cộng các hoành độ của  $A$  và  $B$  ;

c) Nếu tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành thì trung bình cộng các tọa độ tương ứng của  $A$  và  $C$  bằng trung bình cộng các tọa độ tương ứng của  $B$  và  $D$ .

## II. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho tứ giác  $ABCD$ . Số các vectơ khác  $\vec{0}$  có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tứ giác bằng :

(A) 4 ;

(B) 6 ;

(C) 8 ;

(D) 12.

2. Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ . Số các vectơ khác  $\vec{0}$  cùng phương với  $\vec{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của lục giác bằng :
- (A) 4 ;                      (B) 6 ;                      (C) 7 ;                      (D) 8.
3. Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ . Số các vectơ bằng vectơ  $\vec{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của lục giác bằng :
- (A) 2 ;                      (B) 3 ;                      (C) 4 ;                      (D) 6.
4. Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 3, BC = 4$ . Độ dài của vectơ  $\vec{AC}$  là :
- (A) 5 ;                      (B) 6 ;                      (C) 7 ;                      (D) 9.
5. Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng ?
- (A)  $\vec{CA} - \vec{BA} = \vec{BC}$  ;                      (B)  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{BC}$  ;  
(C)  $\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CB}$  ;                      (D)  $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{CA}$ .
6. Cho hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ . Điều kiện để điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là :
- (A)  $IA = IB$  ;                      (B)  $\vec{IA} = \vec{IB}$  ;  
(C)  $\vec{IA} = -\vec{IB}$  ;                      (D)  $\vec{AI} = \vec{BI}$ .
7. Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm,  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng ?
- (A)  $\vec{GA} = 2\vec{GI}$  ;                      (B)  $\vec{IG} = -\frac{1}{3}\vec{IA}$  ;  
(C)  $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GI}$  ;                      (D)  $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GA}$ .
8. Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng ?
- (A)  $\vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{BC}$  ;                      (B)  $\vec{AC} + \vec{BC} = \vec{AB}$  ;  
(C)  $\vec{AC} - \vec{BD} = 2\vec{CD}$  ;                      (D)  $\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{CD}$ .
9. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho hình bình hành  $OABC$ ,  $C$  nằm trên  $Ox$ . Khẳng định nào sau đây là đúng ?
- (A)  $\vec{AB}$  có tung độ khác 0 ;                      (B)  $A$  và  $B$  có tung độ khác nhau ;  
(C)  $C$  có hoành độ bằng 0 ;                      (D)  $x_A + x_C - x_B = 0$ .

10. Cho  $\vec{u} = (3; -2)$ ,  $\vec{v} = (1; 6)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng ?
- (A)  $\vec{u} + \vec{v}$  và  $\vec{a} = (-4; 4)$  ngược hướng ;  
 (B)  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương ;  
 (C)  $\vec{u} - \vec{v}$  và  $\vec{b} = (6; -24)$  cùng hướng ;  
 (D)  $2\vec{u} + \vec{v}$  và  $\vec{v}$  cùng phương.
11. Cho tam giác  $ABC$  có  $A(3; 5)$ ,  $B(1; 2)$ ,  $C(5; 2)$ . Trọng tâm của tam giác  $ABC$  là :
- (A)  $G_1(-3; 4)$ ; (B)  $G_2(4; 0)$ ;  
 (C)  $G_3(\sqrt{2}; 3)$ ; (D)  $G_4(3; 3)$ .
12. Cho bốn điểm  $A(1; 1)$ ,  $B(2; -1)$ ,  $C(4; 3)$ ,  $D(3; 5)$ . Chọn mệnh đề đúng :
- (A) Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành ;  
 (B) Điểm  $G(2; \frac{5}{3})$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$  ;  
 (C)  $\vec{AB} = \vec{CD}$  ;  
 (D)  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$  cùng phương.
13. Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho bốn điểm  $A(-5; -2)$ ,  $B(-5; 3)$ ,  $C(3; 3)$ ,  $D(3; -2)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng ?
- (A)  $\vec{AB}$  và  $\vec{CD}$  cùng hướng ; (B) Tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật ;  
 (C) Điểm  $I(-1; 1)$  là trung điểm  $AC$  ; (D)  $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$  .
14. Cho tam giác  $ABC$ . Đặt  $\vec{a} = \vec{BC}$ ,  $\vec{b} = \vec{AC}$ . Các cặp vectơ nào sau đây cùng phương ?
- (A)  $2\vec{a} + \vec{b}$  và  $\vec{a} + 2\vec{b}$  ; (B)  $\vec{a} - 2\vec{b}$  và  $2\vec{a} - \vec{b}$  ;  
 (C)  $5\vec{a} + \vec{b}$  và  $-10\vec{a} - 2\vec{b}$  ; (D)  $\vec{a} + \vec{b}$  và  $\vec{a} - \vec{b}$  .
15. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho hình vuông  $ABCD$  có gốc  $O$  là tâm của hình vuông và các cạnh của nó song song với các trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là đúng ?
- (A)  $|\vec{OA} + \vec{OB}| = AB$  ; (B)  $\vec{OA} - \vec{OB}$  và  $\vec{DC}$  cùng hướng ;  
 (C)  $x_A = -x_C$  và  $y_A = y_C$  ; (D)  $x_B = -x_C$  và  $y_C = -y_B$  .

16. Cho  $M(3 ; -4)$ . Kẻ  $MM_1$  vuông góc với  $Ox$ ,  $MM_2$  vuông góc với  $Oy$ . Khẳng định nào sau đây là đúng ?
- (A)  $\overline{OM_1} = -3$  ; (B)  $\overline{OM_2} = 4$  ;  
 (C)  $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$  có tọa độ  $(-3 ; -4)$  ; (D)  $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$  có tọa độ  $(3 ; -4)$ .
17. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho  $A(2 ; -3)$ ,  $B(4 ; 7)$ . Tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$  là
- (A)  $(6 ; 4)$  ; (B)  $(2 ; 10)$  ;  
 (C)  $(3 ; 2)$  ; (D)  $(8 ; -21)$ .
18. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho  $A(5 ; 2)$ ,  $B(10 ; 8)$ . Tọa độ của vectơ  $\overline{AB}$  là
- (A)  $(15 ; 10)$  ; (B)  $(2 ; 4)$  ;  
 (C)  $(5 ; 6)$  ; (D)  $(50 ; 16)$ .
19. Cho tam giác  $ABC$  có  $B(9 ; 7)$ ,  $C(11 ; -1)$ ,  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Tọa độ của vectơ  $\overline{MN}$  là
- (A)  $(2 ; -8)$  ; (B)  $(1 ; -4)$  ;  
 (C)  $(10 ; 6)$  ; (D)  $(5 ; 3)$ .
20. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho bốn điểm  $A(3 ; -2)$ ,  $B(7 ; 1)$ ,  $C(0 ; 1)$ ,  $D(-8 ; -5)$ .  
 Khẳng định nào sau đây là đúng ?
- (A)  $\overline{AB}$  và  $\overline{CD}$  đối nhau ;  
 (B)  $\overline{AB}$  và  $\overline{CD}$  cùng phương nhưng ngược hướng ;  
 (C)  $\overline{AB}$  và  $\overline{CD}$  cùng phương và cùng hướng ;  
 (D)  $A, B, C, D$  thẳng hàng.
21. Cho ba điểm  $A(-1 ; 5)$ ,  $B(5 ; 5)$ ,  $C(-1 ; 11)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng ?
- (A)  $A, B, C$  thẳng hàng ;  
 (B)  $\overline{AB}$  và  $\overline{AC}$  cùng phương ;  
 (C)  $\overline{AB}$  và  $\overline{AC}$  không cùng phương ;  
 (D)  $\overline{AC}$  và  $\overline{BC}$  cùng phương.

22. Cho  $\vec{a} = (3; -4)$ ,  $\vec{b} = (-1; 2)$ . Toạ độ của vectơ  $\vec{a} + \vec{b}$  là  
 (A)  $(-4; 6)$ ; (B)  $(2; -2)$ ; (C)  $(4; -6)$ ; (D)  $(-3; -8)$ .
23. Cho  $\vec{a} = (-1; 2)$ ,  $\vec{b} = (5; -7)$ . Toạ độ của vectơ  $\vec{a} - \vec{b}$  là  
 (A)  $(6; -9)$ ; (B)  $(4; -5)$ ; (C)  $(-6; 9)$ ; (D)  $(-5; -14)$ .
24. Cho  $\vec{a} = (-5; 0)$ ,  $\vec{b} = (4; x)$ . Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương nếu số  $x$  là  
 (A)  $-5$ ; (B)  $4$ ; (C)  $0$ ; (D)  $-1$ .
25. Cho  $\vec{a} = (x; 2)$ ,  $\vec{b} = (-5; 1)$ ,  $\vec{c} = (x; 7)$ . Vectơ  $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$  nếu  
 (A)  $x = -15$ ; (B)  $x = 3$ ; (C)  $x = 15$ ; (D)  $x = 5$ .
26. Cho  $A(1; 1)$ ,  $B(-2; -2)$ ,  $C(7; 7)$ . Khẳng định nào đúng?  
 (A)  $G(2; 2)$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ ;  
 (B) Điểm  $B$  ở giữa hai điểm  $A$  và  $C$ ;  
 (C) Điểm  $A$  ở giữa hai điểm  $B$  và  $C$ ;  
 (D) Hai vectơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$  cùng hướng.
27. Các điểm  $M(2; 3)$ ,  $N(0; -4)$ ,  $P(-1; 6)$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  của tam giác  $ABC$ . Toạ độ đỉnh  $A$  của tam giác là:  
 (A)  $(1; 5)$ ; (B)  $(-3; -1)$ ; (C)  $(-2; -7)$ ; (D)  $(1; -10)$ .
28. Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm là gốc tọa độ  $O$ , hai đỉnh  $A$  và  $B$  có tọa độ là  $A(-2; 2)$ ,  $B(3; 5)$ . Toạ độ của đỉnh  $C$  là:  
 (A)  $(-1; -7)$ ; (B)  $(2; -2)$ ; (C)  $(-3; -5)$ ; (D)  $(1; 7)$ .
29. Khẳng định nào trong các khẳng định sau là đúng?  
 (A) Hai vectơ  $\vec{a} = (-5; 0)$  và  $\vec{b} = (-4; 0)$  cùng hướng;  
 (B) Vectơ  $\vec{c} = (7; 3)$  là vectơ đối của  $\vec{d} = (-7; 3)$ ;  
 (C) Hai vectơ  $\vec{u} = (4; 2)$  và  $\vec{v} = (8; 3)$  cùng phương;  
 (D) Hai vectơ  $\vec{a} = (6; 3)$  và  $\vec{b} = (2; 1)$  ngược hướng.
30. Trong hệ trục  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , tọa độ của vectơ  $\vec{i} + \vec{j}$  là:  
 (A)  $(0; 1)$ ; (B)  $(-1; 1)$ ; (C)  $(1; 0)$ ; (D)  $(1; 1)$ .



## Tìm hiểu về vectơ

Việc nghiên cứu vectơ và các phép toán trên các vectơ bắt nguồn từ nhu cầu của cơ học và vật lí. Trước thế kỉ XIX người ta dùng toạ độ để xác định vectơ và quy các phép toán trên các vectơ về các phép toán trên toạ độ của chúng. Chỉ vào giữa thế kỉ XIX, người ta mới xây dựng được các phép toán trực tiếp trên các vectơ như chúng ta đã nghiên cứu trong chương I. Các nhà toán học Ha-min-ton (*W. Hamilton*), Grat-sman (*H. Grassmann*) và Gip (*J. Gibbs*) là những người đầu tiên nghiên cứu một cách có hệ thống về vectơ. Thuật ngữ “Vectơ” cũng được đưa ra từ các công trình ấy. *Vector* theo tiếng La-tinh có nghĩa là *Vật mang*. Đến đầu thế kỉ XX vectơ được hiểu là phần tử của một tập hợp nào đó mà trên đó đã cho các phép toán thích hợp để trở thành một cấu trúc gọi là không gian vectơ. Nhà toán học Vây (*Weyl*) đã xây dựng hình học Ô-clit dựa vào không gian vectơ theo hệ tiên đề và được nhiều người tiếp nhận một cách thích thú. Đối tượng cơ bản được đưa ra trong hệ tiên đề này là *điểm* và *vectơ*. Việc xây dựng này cho phép ta có thể mở rộng số chiều của không gian một cách dễ dàng và có thể sử dụng các công cụ của lí thuyết tập hợp và ánh xạ. Đồng thời hình học có thể sử dụng những cấu trúc đại số để phát triển theo các phương hướng mới.

Vào những năm giữa thế kỉ XX, trong xu hướng hiện đại hoá chương trình phổ thông, nhiều nhà toán học trên thế giới đã vận động đưa việc giảng dạy vectơ vào trường phổ thông. Ở nước ta, vectơ và toạ độ cũng được đưa vào giảng dạy ở trường phổ thông cùng với một chương trình toán hiện đại nhằm đổi mới để nâng cao chất lượng giáo dục cho phù hợp với xu thế chung của thế giới.

## TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

- ❖ Giá trị lượng giác của một góc bất kì từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$
- ❖ Tích vô hướng của hai vectơ và ứng dụng
- ❖ Các hệ thức lượng trong tam giác và giải tam giác

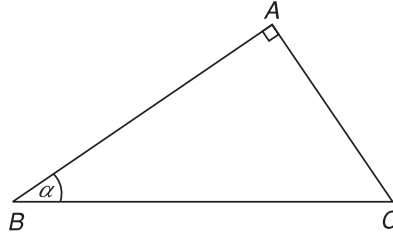


Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu thêm một phép toán mới về vectơ, đó là phép nhân vô hướng của hai vectơ. Phép nhân này cho kết quả là một số, số đó gọi là *tích vô hướng của hai vectơ*. Để có thể xác định tích vô hướng của hai vectơ ta cần đến khái niệm *giá trị lượng giác của một góc  $\alpha$  bất kì* với  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  là mở rộng của khái niệm tỉ số lượng giác của một góc nhọn  $\alpha$  đã biết ở lớp 9.



# §1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ $0^\circ$ ĐẾN $180^\circ$

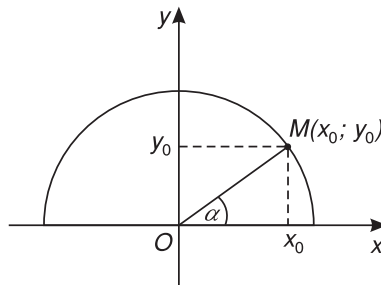
- 1 Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có góc nhọn  $\widehat{ABC} = \alpha$ . Hãy nhắc lại định nghĩa các tỉ số lượng giác của góc nhọn  $\alpha$  đã học ở lớp 9.



Hình 2.1

- 2 Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , nửa đường tròn tâm  $O$  nằm phía trên trục hoành bán kính  $R = 1$  được gọi là nửa đường tròn đơn vị (h.2.2). Nếu cho trước một góc nhọn  $\alpha$  thì ta có thể xác định một điểm  $M$  duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho  $\widehat{xOM} = \alpha$ . Giả sử điểm  $M$  có tọa độ  $(x_0; y_0)$ .

Hãy chứng tỏ rằng  $\sin \alpha = y_0$ ,  $\cos \alpha = x_0$ ,  $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$ ,  $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$ .

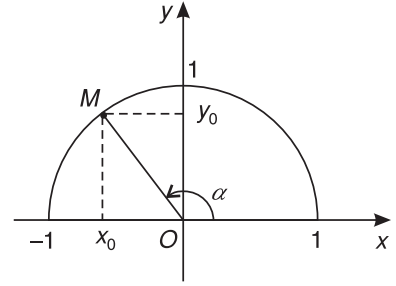


Hình 2.2

Mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác đối với góc nhọn cho những góc  $\alpha$  bất kì với  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ , ta có định nghĩa sau đây :

# 1. Định nghĩa

Với mỗi góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) ta xác định một điểm  $M$  trên nửa đường tròn đơn vị (h.2.3) sao cho  $\widehat{xOM} = \alpha$  và giả sử điểm  $M$  có tọa độ  $M(x_0; y_0)$ . Khi đó ta định nghĩa :



Hình 2.3

- sin của góc  $\alpha$  là  $y_0$ , kí hiệu  $\sin \alpha = y_0$  ;
- cosin của góc  $\alpha$  là  $x_0$ , kí hiệu  $\cos \alpha = x_0$  ;
- tang của góc  $\alpha$  là  $\frac{y_0}{x_0}$  ( $x_0 \neq 0$ ), kí hiệu  $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$  ;
- cotang của góc  $\alpha$  là  $\frac{x_0}{y_0}$  ( $y_0 \neq 0$ ), kí hiệu  $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$  .

Các số  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$  được gọi là các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ .



**Ví dụ.** Tìm các giá trị lượng giác của góc  $135^\circ$ .

Lấy điểm  $M$  trên nửa đường tròn đơn vị sao cho  $\widehat{xOM} = 135^\circ$ . Khi đó ta có  $\widehat{yOM} = 45^\circ$ . Từ đó ta suy ra tọa độ của điểm  $M$  là  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  (h.2.4).

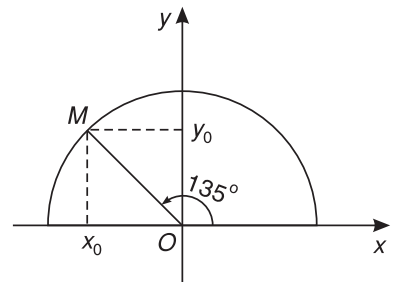
Vậy  $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ;  $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 135^\circ = -1$  ;  $\cot 135^\circ = -1$ .



**Chú ý.** • Nếu  $\alpha$  là góc tù thì  $\cos \alpha < 0, \tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$ .

- $\tan \alpha$  chỉ xác định khi  $\alpha \neq 90^\circ$ ,
- $\cot \alpha$  chỉ xác định khi  $\alpha \neq 0^\circ$
- và  $\alpha \neq 180^\circ$ .



Hình 2.4

## 2. Tính chất

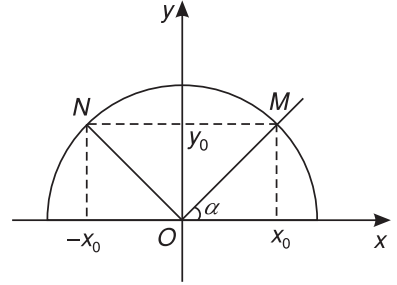
Trên hình 2.5 ta có dây cung  $NM$  song song với trục  $Ox$  và nếu  $\widehat{xOM} = \alpha$  thì  $\widehat{xON} = 180^\circ - \alpha$ . Ta có  $y_M = y_N = y_0$ ,  $x_M = -x_N = x_0$ . Do đó

$$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha)$$

$$\tan \alpha = -\tan (180^\circ - \alpha)$$

$$\cot \alpha = -\cot (180^\circ - \alpha).$$



Hình 2.5

## 3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt


Giá trị lượng giác của các góc bất kì có thể tìm thấy trên bảng số hoặc trên máy tính bỏ túi.

Sau đây là giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt mà chúng ta cần ghi nhớ.

Bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Giá trị lượng giác \ $\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	


Trong bảng, kí hiệu "||" để chỉ giá trị lượng giác không xác định.

 **Chú ý.** Từ giá trị lượng giác của các góc đặc biệt đã cho trong bảng và tính chất trên, ta có thể suy ra giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt khác.

Chẳng hạn :

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

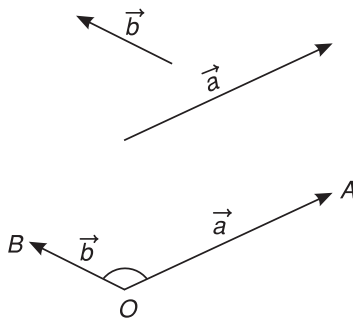
 3 Tìm các giá trị lượng giác của các góc  $120^\circ$ ,  $150^\circ$ .

#### 4. Góc giữa hai vectơ


##### a) Định nghĩa

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kì ta vẽ  $\vec{OA} = \vec{a}$  và  $\vec{OB} = \vec{b}$ . Góc  $\widehat{AOB}$  với số đo từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$  được gọi là **góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$** . Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là  $(\vec{a}, \vec{b})$  (h.2.6). Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  thì ta nói rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau, kí hiệu là  $\vec{a} \perp \vec{b}$  hoặc  $\vec{b} \perp \vec{a}$ .

b) **Chú ý.** Từ định nghĩa ta có  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ .



Hình 2.6

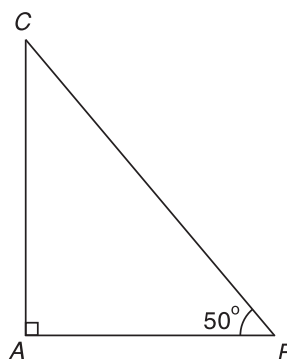
 4 Khi nào góc giữa hai vectơ bằng  $0^\circ$ ? Khi nào góc giữa hai vectơ bằng  $180^\circ$ ?

c) Ví dụ. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có góc  $\widehat{B} = 50^\circ$  (h.2.7). Khi đó :

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 50^\circ, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ,$$

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 40^\circ, (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = 40^\circ,$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 140^\circ, (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 90^\circ.$$



Hình 2.7

## 5. Sử dụng máy tính bỏ túi để tính giá trị lượng giác của một góc

Ta có thể sử dụng các loại máy tính bỏ túi để tính giá trị lượng giác của một góc, chẳng hạn đối với máy CASIO fx – 500MS cách thực hiện như sau :

### a) Tính các giá trị lượng giác của góc $\alpha$

Sau khi mở máy ấn phím **MODE** nhiều lần để màn hình hiện lên dòng chữ ứng với các số sau đây :

Deg	Rad	Gra
1	2	3

Sau đó ấn phím **1** để xác định đơn vị đo góc là "độ" và tính giá trị lượng giác của góc.

- Tính  $\sin\alpha$ ,  $\cos\alpha$  và  $\tan\alpha$ .



**Ví dụ 1.** Tính  $\sin 63^\circ 52' 41''$ .

Ấn liên tiếp các phím sau đây :

$$\boxed{\sin} \boxed{63} \boxed{0'''} \boxed{52} \boxed{0'''} \boxed{41} \boxed{0'''} \boxed{=}$$

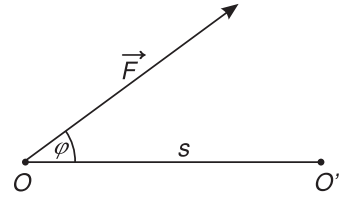
Ta được kết quả là :  $\sin 63^\circ 52' 41'' \approx 0,897859012$ .

Để tính  $\cos\alpha$  và  $\tan\alpha$  ta cũng làm như trên, chỉ thay việc ấn phím **sin** bằng phím **cos** hay **tan**.



## §2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Trong vật lí, ta biết rằng nếu có một lực  $\vec{F}$  tác động lên một vật tại điểm  $O$  và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường  $s = OO'$  thì công  $A$  của lực  $\vec{F}$  được tính theo công thức :



Hình 2.8

$$A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{OO'}| \cos \varphi \quad (\text{h.2.8})$$

trong đó  $|\vec{F}|$  là cường độ của lực  $\vec{F}$  tính bằng Niuton (viết tắt là N),  $|\overrightarrow{OO'}|$  là độ dài của vectơ  $\overrightarrow{OO'}$  tính bằng mét (m),  $\varphi$  là góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{OO'}$  và  $\vec{F}$ , còn công  $A$  được tính bằng Jun (viết tắt là J).

Trong toán học, giá trị  $A$  của biểu thức trên (không kể đơn vị đo) được gọi là tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{F}$  và  $\overrightarrow{OO'}$ .

1.

### Định nghĩa

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vectơ  $\vec{0}$ . **Tích vô hướng** của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức sau :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng vectơ  $\vec{0}$  ta quy ước  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

### Chú ý

a) Với  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác vectơ  $\vec{0}$  ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ .

b) Khi  $\vec{a} = \vec{b}$  tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  được kí hiệu là  $\vec{a}^2$  và số này được gọi là  **bình phương vô hướng của vectơ  $\vec{a}$** .

Ta có  $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ .

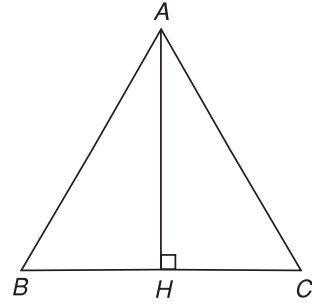


**Ví dụ.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$  và có chiều cao  $AH$ . Khi đó ta có (h.2.9)

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2,$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{CB} = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}a^2,$$

$$\vec{AH} \cdot \vec{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \cos 90^\circ = 0.$$



Hình 2.9

## 2. Các tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng :

Với ba vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  bất kì và mọi số  $k$  ta có :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \text{ (tính chất giao hoán) ;}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \text{ (tính chất phân phối) ;}$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) ;$$

$$\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}.$$

**Nhận xét.** Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra :

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 ;$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 ;$$

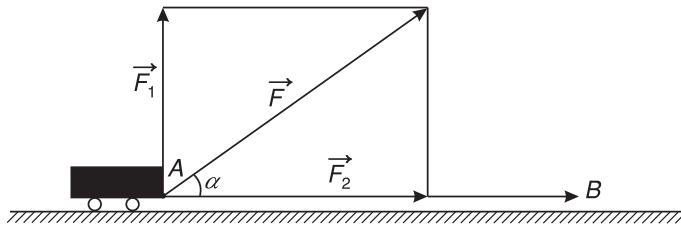
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2.$$



1 Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Khi nào thì tích vô hướng của hai vectơ đó là số dương ? Là số âm ? Bằng 0 ?



Ứng dụng. Một xe goòng chuyển động từ A đến B dưới tác dụng của lực  $\vec{F}$ . Lực  $\vec{F}$  tạo với hướng chuyển động một góc  $\alpha$ , tức là  $(\vec{F}, \vec{AB}) = \alpha$  (h.2.10).



Hình 2.10

Lực  $\vec{F}$  được phân tích thành hai thành phần  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  trong đó  $\vec{F}_1$  vuông góc với  $\vec{AB}$ , còn  $\vec{F}_2$  là hình chiếu của  $\vec{F}$  lên đường thẳng AB. Ta có  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ . Công  $\mathcal{A}$  của lực  $\vec{F}$  là  $\mathcal{A} = \vec{F} \cdot \vec{AB} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \vec{AB} = \vec{F}_1 \cdot \vec{AB} + \vec{F}_2 \cdot \vec{AB} = \vec{F}_2 \cdot \vec{AB}$ .

Như vậy lực thành phần  $\vec{F}_1$  không làm cho xe goòng chuyển động nên không sinh công. Chỉ có thành phần  $\vec{F}_2$  của lực  $\vec{F}$  sinh công làm cho xe goòng chuyển động từ A đến B.

Công thức  $\mathcal{A} = \vec{F} \cdot \vec{AB}$  là công thức tính công của lực  $\vec{F}$  làm vật di chuyển từ A đến B mà ta đã biết trong vật lí.

### 3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trên mặt phẳng tọa độ  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ .

Khi đó tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  là :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$


$$\begin{aligned} \text{Thật vậy } \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}) \\ &= a_1 b_1 \vec{i} \cdot \vec{i} + a_2 b_2 \vec{j} \cdot \vec{j} + a_1 b_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + a_2 b_1 \vec{j} \cdot \vec{i}. \end{aligned}$$

Vì  $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$  và  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$  nên suy ra :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

**Nhận xét.** Hai vectơ  $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$  đều khác vectơ  $\vec{0}$  vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

 2 Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm  $A(2 ; 4)$ ,  $B(1 ; 2)$ ,  $C(6 ; 2)$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ .

## 4. Ứng dụng

a) **Độ dài của vectơ**

Độ dài của vectơ  $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$  được tính theo công thức :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$


Thật vậy, ta có  $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 = a_1^2 + a_2^2$ .

Do đó  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ .

b) **Góc giữa hai vectơ**

Từ định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra nếu  $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$  và  $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$  đều khác  $\vec{0}$  thì ta có :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

 **Ví dụ.** Cho  $\overrightarrow{OM} = (-2 ; -1)$ ,  $\overrightarrow{ON} = (3 ; -1)$ .

Ta có  $\cos \widehat{MON} = \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}|} = \frac{-6 + 1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Vậy  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = 135^\circ$ .

### c) Khoảng cách giữa hai điểm

Khoảng cách giữa hai điểm  $A(x_A; y_A)$  và  $B(x_B; y_B)$  được tính theo công thức :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Thật vậy, vì  $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$  nên ta có

$$AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$



**Ví dụ.** Cho hai điểm  $M(-2; 2)$  và  $N(1; 1)$ . Khi đó  $\vec{MN} = (3; -1)$  và khoảng cách  $MN$  là :  $|\vec{MN}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ .

## Câu hỏi và bài tập

1. Cho tam giác vuông cân  $ABC$  có  $AB = AC = a$ . Tính các tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ,  $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$ .
2. Cho ba điểm  $O, A, B$  thẳng hàng và biết  $OA = a, OB = b$ . Tính tích vô hướng  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  trong hai trường hợp :
  - a) Điểm  $O$  nằm ngoài đoạn  $AB$  ;
  - b) Điểm  $O$  nằm trong đoạn  $AB$  .
3. Cho nửa đường tròn tâm  $O$  có đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $M$  và  $N$  là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho hai dây cung  $AM$  và  $BN$  cắt nhau tại  $I$ .
  - a) Chứng minh  $\vec{AI} \cdot \vec{AM} = \vec{AI} \cdot \vec{AB}$  và  $\vec{BI} \cdot \vec{BN} = \vec{BI} \cdot \vec{BA}$  ;
  - b) Hãy dùng kết quả câu a) để tính  $\vec{AI} \cdot \vec{AM} + \vec{BI} \cdot \vec{BN}$  theo  $R$ .
4. Trên mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(1; 3), B(4; 2)$ .
  - a) Tìm tọa độ điểm  $D$  nằm trên trục  $Ox$  sao cho  $DA = DB$  ;
  - b) Tính chu vi tam giác  $OAB$  ;
  - c) Chứng tỏ  $OA$  vuông góc với  $AB$  và từ đó tính diện tích tam giác  $OAB$ .

5. Trên mặt phẳng  $Oxy$  hãy tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  trong các trường hợp sau :
- a)  $\vec{a} = (2 ; -3), \vec{b} = (6 ; 4)$  ;
- b)  $\vec{a} = (3 ; 2), \vec{b} = (5 ; -1)$  ;
- c)  $\vec{a} = (-2 ; -2\sqrt{3}), \vec{b} = (3 ; \sqrt{3})$ .
6. Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho bốn điểm  $A(7 ; -3), B(8 ; 4), C(1 ; 5), D(0 ; -2)$ . Chứng minh rằng tứ giác  $ABCD$  là hình vuông.
7. Trên mặt phẳng  $Oxy$  cho điểm  $A(-2 ; 1)$ . Gọi  $B$  là điểm đối xứng với điểm  $A$  qua gốc tọa độ  $O$ . Tìm tọa độ của điểm  $C$  có tung độ bằng 2 sao cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $C$ .

### §3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

Chúng ta biết rằng một tam giác được hoàn toàn xác định nếu biết một số yếu tố, chẳng hạn biết ba cạnh, hoặc hai cạnh và góc xen giữa hai cạnh đó.

Như vậy giữa các cạnh và các góc của một tam giác có một mối liên hệ xác định nào đó mà ta sẽ gọi là *các hệ thức lượng trong tam giác*. Trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu những hệ thức đó và các ứng dụng của chúng.

Đối với tam giác  $ABC$  ta thường kí hiệu :  $a = BC, b = CA, c = AB$ .



1 Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có đường cao  $AH = h$  và có  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Gọi  $BH = c'$  và  $CH = b'$  (h.2.11). Hãy điền vào các ô trống trong các hệ thức sau đây để được các hệ thức lượng trong tam giác vuông :

$$a^2 = b^2 + \boxed{\dots}$$

$$b^2 = a \times \boxed{\dots}$$

$$c^2 = a \times \boxed{\dots}$$

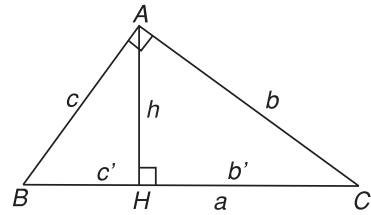
$$h^2 = b' \times \boxed{\dots}$$

$$ah = b \times \boxed{\dots}$$

$$\frac{1}{\boxed{\dots}} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\sin B = \cos C = \frac{\boxed{\dots}}{a}; \quad \sin C = \cos B = \frac{\boxed{\dots}}{a}$$

$$\tan B = \cot C = \frac{\boxed{\dots}}{c}; \quad \cot B = \tan C = \frac{\boxed{\dots}}{b}.$$



Hình 2.11

Trước tiên ta tìm hiểu hai hệ thức lượng cơ bản trong tam giác bất kỳ là định lí côsin và định lí sin.

## 1. Định lí côsin

a) **Bài toán.** Trong tam giác  $ABC$  cho biết hai cạnh  $AB, AC$  và góc  $A$ , hãy tính cạnh  $BC$  (hình 2.12).

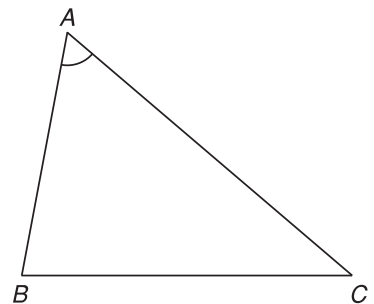
*GIẢI*

$$\begin{aligned} \text{Ta có } BC^2 &= |\overrightarrow{BC}|^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \\ &= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos A.$$

$$\text{Vậy ta có } BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$$

$$\text{nên } BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A}.$$




Hình 2.12


Từ kết quả của bài toán trên ta suy ra định lí sau đây :

**b) Định lí côsin**

Trong tam giác  $ABC$  bất kì với  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  ta có :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A ; \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B ; \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C . \end{aligned}$$

 2 Hãy phát biểu định lí côsin bằng lời.

 3 Khi  $ABC$  là tam giác vuông, định lí côsin trở thành định lí quen thuộc nào ?

Từ định lí côsin ta suy ra :

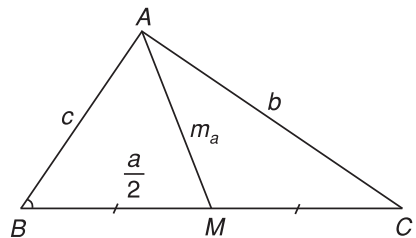
**Hệ quả**

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} ; \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} ; \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} . \end{aligned}$$

**c) Áp dụng.** Tính độ dài đường trung tuyến của tam giác.

Cho tam giác  $ABC$  có các cạnh  $BC = a$ ,  $CA = b$  và  $AB = c$ . Gọi  $m_a$ ,  $m_b$  và  $m_c$  là độ dài các đường trung tuyến lần lượt vẽ từ các đỉnh  $A$ ,  $B$  và  $C$  của tam giác. Ta có :

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} ; \\ m_b^2 &= \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} ; \\ m_c^2 &= \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} . \end{aligned}$$



Hình 2.13

Thật vậy, gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ , áp dụng định lí côsin vào tam giác  $AMB$  ta có :

$$m_a^2 = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2c \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos B = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac \cos B$$


Vì  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$  nên ta suy ra :

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Chứng minh tương tự ta có :

$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

 4 Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 7$  cm,  $b = 8$  cm và  $c = 6$  cm. Hãy tính độ dài đường trung tuyến  $m_a$  của tam giác  $ABC$  đã cho.

**d) Ví dụ**



**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  có các cạnh  $AC = 10$  cm,  $BC = 16$  cm và góc  $\widehat{C} = 110^\circ$ . Tính cạnh  $AB$  và các góc  $A, B$  của tam giác đó.

*GIẢI*

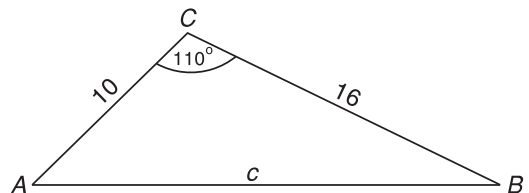
Đặt  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ .

Theo định lí côsin ta có :

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &= 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \cos 110^\circ \end{aligned}$$

$$c^2 \approx 465,44.$$

Vậy  $c \approx \sqrt{465,44} \approx 21,6$  (cm).



Hình 2.14

Theo hệ quả định lí côsin ta có :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx \frac{10^2 + (21,6)^2 - 16^2}{2 \cdot 10 \cdot (21,6)} \approx 0,7188.$$

Suy ra  $\widehat{A} \approx 44^\circ 2'$ ,  $\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) \approx 25^\circ 58'$ .



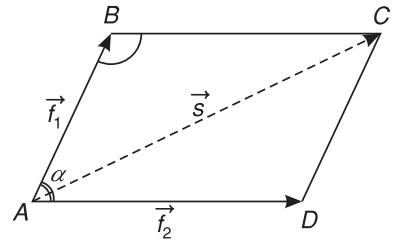
**Ví dụ 2.** Hai lực  $\vec{f}_1$  và  $\vec{f}_2$  cho trước cùng tác dụng lên một vật và tạo thành góc nhọn  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = \alpha$ . Hãy lập công thức tính cường độ của hợp lực  $\vec{s}$ .

GIẢI

Đặt  $\vec{AB} = \vec{f}_1$ ,  $\vec{AD} = \vec{f}_2$  và vẽ hình bình hành  $ABCD$  (h.2.15).

Khi đó  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{s}$ .

Vậy  $|\vec{s}| = |\vec{AC}| = |\vec{f}_1 + \vec{f}_2|$ .



Hình 2.15

Theo định lí côsin đối với tam giác  $ABC$  ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B,$$

hay  $|\vec{s}|^2 = |\vec{f}_1|^2 + |\vec{f}_2|^2 - 2|\vec{f}_1| \cdot |\vec{f}_2| \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$ .

Do đó  $|\vec{s}| = \sqrt{|\vec{f}_1|^2 + |\vec{f}_2|^2 + 2|\vec{f}_1| \cdot |\vec{f}_2| \cdot \cos \alpha}$ .

## 2. Định lí sin



5 Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  nội tiếp trong đường tròn bán kính  $R$  và có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Chứng minh hệ thức :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Đối với tam giác  $ABC$  bất kì ta cũng có hệ thức trên. Hệ thức này được gọi là *định lí sin* trong tam giác.



**a) Định lí sin**

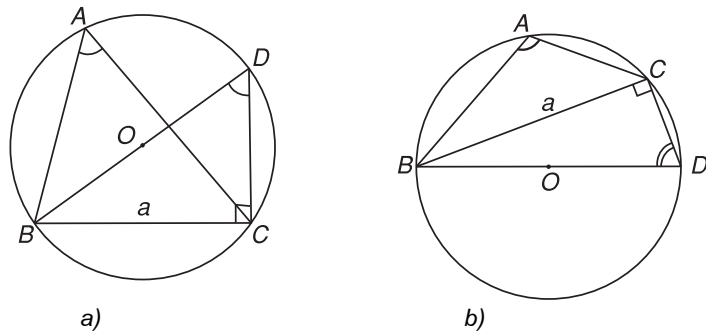
Trong tam giác  $ABC$  bất kì với  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  và  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp, ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

**CHỨNG MINH.** Ta chứng minh hệ thức  $\frac{a}{\sin A} = 2R$ . Xét hai trường hợp :

• Nếu góc  $A$  nhọn, ta vẽ đường kính  $BD$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  và khi đó vì tam giác  $BCD$  vuông tại  $C$  nên ta có  $BC = BD \cdot \sin D$  hay  $a = 2R \cdot \sin D$  (h.2.16a).

Ta có  $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$  vì đó là hai góc nội tiếp cùng chắn cung  $\widehat{BC}$ . Do đó  $a = 2R \cdot \sin A$  hay  $\frac{a}{\sin A} = 2R$ .



Hình 2.16

• Nếu góc  $A$  tù, ta cũng vẽ đường kính  $BD$  của đường tròn tâm  $O$  ngoại tiếp tam giác  $ABC$  (h.2.16b). Tứ giác  $ABDC$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$  nên  $\widehat{D} = 180^\circ - \widehat{A}$ . Do đó  $\sin D = \sin(180^\circ - A)$ . Ta cũng có  $BC = BD \cdot \sin D$  hay  $a = BD \cdot \sin A$ .

Vậy  $a = 2R \sin A$  hay  $\frac{a}{\sin A} = 2R$ .

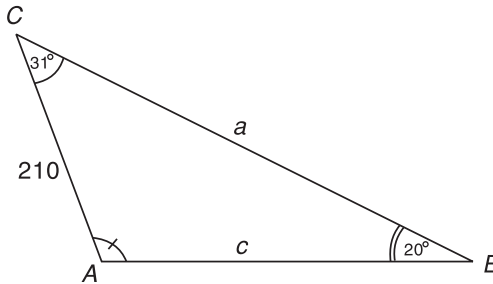
Các đẳng thức  $\frac{b}{\sin B} = 2R$  và  $\frac{c}{\sin C} = 2R$  được chứng minh tương tự.

Vậy ta có  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

**6** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Hãy tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

**b) Ví dụ.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{B} = 20^\circ$ ,  $\widehat{C} = 31^\circ$  và cạnh  $b = 210$  cm. Tính  $\widehat{A}$ , các cạnh còn lại và bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

GIẢI



Hình 2.17

Ta có  $\widehat{A} = 180^\circ - (20^\circ + 31^\circ)$ , do đó  $\widehat{A} = 129^\circ$  (h.2.17).

Mặt khác theo định lí sin ta có :  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  (1)

Từ (1) suy ra  $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{210 \cdot \sin 129^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 477,2$  (cm).

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{210 \cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 316,2 \text{ (cm)}.$$

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{477,2}{2 \cdot \sin 129^\circ} \approx 307,02 \text{ (cm)}.$$

### 3. Công thức tính diện tích tam giác

Ta kí hiệu  $h_a$ ,  $h_b$  và  $h_c$  là các đường cao của tam giác  $ABC$  lần lượt vẽ từ các đỉnh  $A$ ,  $B$ ,  $C$  và  $S$  là diện tích tam giác đó.



7 Hãy viết các công thức tính diện tích tam giác theo một cạnh và đường cao tương ứng.

Cho tam giác  $ABC$  có các cạnh  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ .

Gọi  $R$  và  $r$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác và

$p = \frac{a+b+c}{2}$  là nửa chu vi của tam giác.

Diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$  được tính theo một trong các công thức sau :

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B ; \quad (1)$$

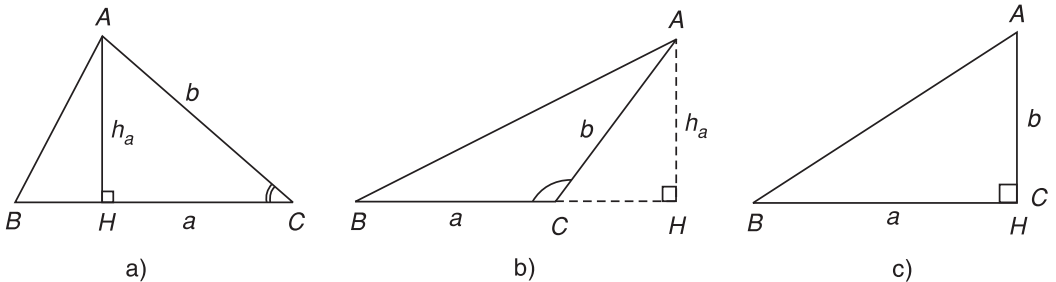
$$S = \frac{abc}{4R} ; \quad (2)$$

$$S = pr ; \quad (3)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{công thức Hê-rông}). \quad (4)$$

Ta chứng minh công thức (1).


Ta đã biết  $S = \frac{1}{2}ah_a$  với  $h_a = AH = AC \sin C = b \sin C$  (kể cả  $\widehat{C}$  nhọn, tù hay vuông) (h.2.18).




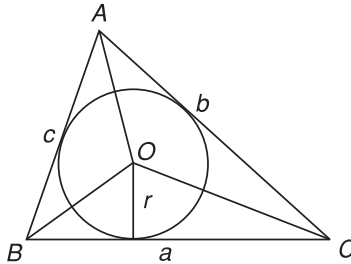
Hình 2.18

Do đó  $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ .

Các công thức  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$  và  $S = \frac{1}{2}ca \sin B$  được chứng minh tương tự.

 8 Dựa vào công thức (1) và định lí sin, hãy chứng minh  $S = \frac{abc}{4R}$ .

 9 Chứng minh công thức  $S = pr$  (h.2.19).



Hình 2.19

Ta thừa nhận công thức Hê-rông.



**Ví dụ 1.** Tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a = 13$  m,  $b = 14$  m và  $c = 15$  m.

- Tính diện tích tam giác  $ABC$  ;
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

*GIẢI*

a) Ta có  $p = \frac{1}{2}(13 + 14 + 15) = 21$ . Theo công thức Hê-rông ta có :

$$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84 \text{ (m}^2\text{)}.$$

b) Áp dụng công thức  $S = pr$  ta có  $r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4$ .

Vậy đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  có bán kính là  $r = 4$  m.

Từ công thức  $S = \frac{abc}{4R}$ .

Ta có  $R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{336} = 8,125 \text{ (m)}.$



**Ví dụ 2.** Tam giác  $ABC$  có cạnh  $a = 2\sqrt{3}$ , cạnh  $b = 2$  và  $\widehat{C} = 30^\circ$ . Tính cạnh  $c$ , góc  $A$  và diện tích tam giác đó.

*GIẢI*

Theo định lí côsin ta có

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 12 + 4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.$$

Vậy  $c = 2$  và tam giác  $ABC$  có  $AB = AC = 2$ . Ta suy ra  $\widehat{B} = \widehat{C} = 30^\circ$ .

Do đó  $\widehat{A} = 120^\circ$ .

Ta có  $S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$  (đơn vị diện tích).

#### 4. Giải tam giác và ứng dụng vào việc đo đạc

##### a) Giải tam giác

Giải tam giác là tìm một số yếu tố của tam giác khi cho biết các yếu tố khác.



Hình 2.20. Giác kế dùng để ngắm và đo đạc.

Muốn giải tam giác ta thường sử dụng các hệ thức đã được nêu lên trong định lí côsin, định lí sin và các công thức tính diện tích tam giác.



**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  biết cạnh  $a = 17,4$  m,  $\widehat{B} = 44^\circ 30'$  và  $\widehat{C} = 64^\circ$ .  
 Tính góc  $\widehat{A}$  và các cạnh  $b, c$ .

*GIẢI*

Ta có  $\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - (44^\circ 30' + 64^\circ) = 71^\circ 30'$ .

Theo định lí sin ta có  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ,

$$\text{do đó} \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A} \approx \frac{17,4 \cdot 0,7009}{0,9483} \approx 12,9 \text{ (m)},$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} \approx \frac{17,4 \cdot 0,8988}{0,9483} \approx 16,5 \text{ (m)}.$$



**Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$  có cạnh  $a = 49,4$ cm,  $b = 26,4$ cm và  $\widehat{C} = 47^\circ 20'$ .  
 Tính cạnh  $c$ ,  $\widehat{A}$  và  $\widehat{B}$ .

*GIẢI*

Theo định lí côsin ta có

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &\approx (49,4)^2 + (26,4)^2 - 2 \cdot 49,4 \cdot 26,4 \cdot 0,6777 \approx 1369,66. \end{aligned}$$

Vậy  $c \approx \sqrt{1369,66} \approx 37$  (cm).

$$\text{Ta có } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx \frac{697 + 1370 - 2440}{2 \cdot 26,4 \cdot 37} \approx -0,191.$$

Như vậy  $\widehat{A}$  là góc tù và ta có  $\widehat{A} \approx 101^\circ$ .

Do đó  $\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) \approx 180^\circ - (101^\circ + 47^\circ 20') \approx 31^\circ 40'$ .

Vậy  $\widehat{B} \approx 31^\circ 40'$ .



**Ví dụ 3.** Cho tam giác  $ABC$  có cạnh  $a = 24$  cm,  $b = 13$  cm và  $c = 15$  cm.  
 Tính diện tích  $S$  của tam giác và bán kính  $r$  của đường tròn nội tiếp.

GIẢI

Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{169 + 225 - 576}{2 \cdot 13 \cdot 15} \approx -0,4667,$$

như vậy  $\hat{A}$  là góc tù và ta tính được  $\hat{A} \approx 117^\circ 49' \Rightarrow \sin A \approx 0,88$ .

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 15 \cdot 0,88 \approx 85,8 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Áp dụng công thức  $S = pr$  ta có  $r = \frac{S}{p}$ . Vì  $p = \frac{24 + 13 + 15}{2} = 26$  nên

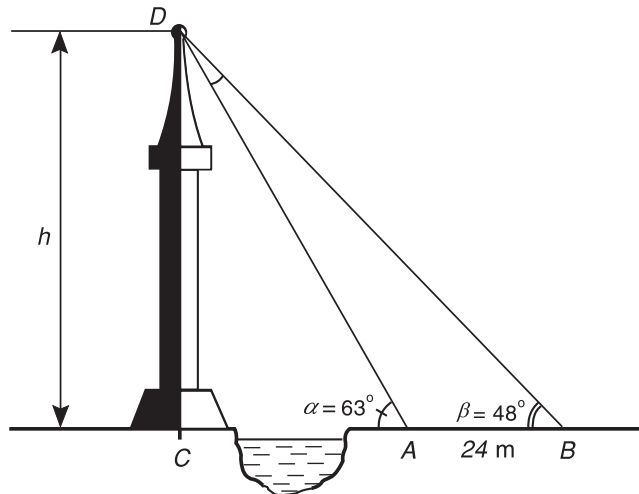
$$r \approx \frac{85,8}{26} = 3,3 \text{ (cm)}.$$

### b) Ứng dụng vào việc đo đạc



**Bài toán 1.** Đo chiều cao của một cái tháp mà không thể đến được chân tháp.

Giả sử  $CD = h$  là chiều cao của tháp trong đó  $C$  là chân tháp. Chọn hai điểm  $A, B$  trên mặt đất sao cho ba điểm  $A, B$  và  $C$  thẳng hàng. Ta đo khoảng cách  $AB$  và các góc  $\widehat{CAD}$ ,  $\widehat{CBD}$ . Chẳng hạn ta đo được  $AB = 24$  m,  $\widehat{CAD} = \alpha = 63^\circ$ ,  $\widehat{CBD} = \beta = 48^\circ$ . Khi đó chiều cao  $h$  của tháp được tính như sau :



Hình 2.21

Áp dụng định lí sin vào tam giác  $ABD$  ta có

$$\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin D}.$$

Ta có  $\alpha = \widehat{D} + \beta$  nên  $\widehat{D} = \alpha - \beta = 63^\circ - 48^\circ = 15^\circ$ .

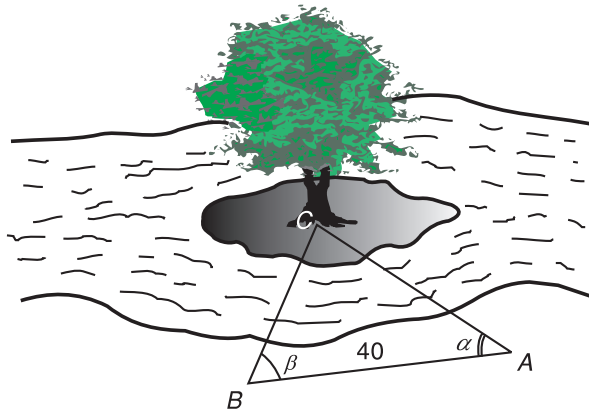
$$\text{Do đó } AD = \frac{AB \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{24 \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} \approx 68,91.$$

Trong tam giác vuông  $ACD$  ta có  $h = CD = AD \sin \alpha \approx 61,4$  (m).



**Bài toán 2.** Tính khoảng cách từ một địa điểm trên bờ sông đến một gốc cây trên một cù lao ở giữa sông.

Để đo khoảng cách từ một điểm  $A$  trên bờ sông đến gốc cây  $C$  trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm  $B$  cùng ở trên bờ với  $A$  và  $B$  có thể nhìn thấy điểm  $C$ . Ta đo khoảng cách  $AB$ , góc  $\widehat{CAB}$  và  $\widehat{CBA}$ . Chẳng hạn ta đo được  $AB = 40$  m,  $\widehat{CAB} = \alpha = 45^\circ$ ,  $\widehat{CBA} = \beta = 70^\circ$ .



Hình 2.22

Khi đó khoảng cách  $AC$  được tính như sau :

Áp dụng định lí sin vào tam giác  $ABC$ , ta có

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \quad (\text{h.2.22}).$$



$$\text{Vì } \sin C = \sin(\alpha + \beta) \text{ nên } AC = \frac{AB \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{40 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 115^\circ} \approx 41,47 \text{ (m).}$$

Vậy  $AC \approx 41,47 \text{ (m)}$ .

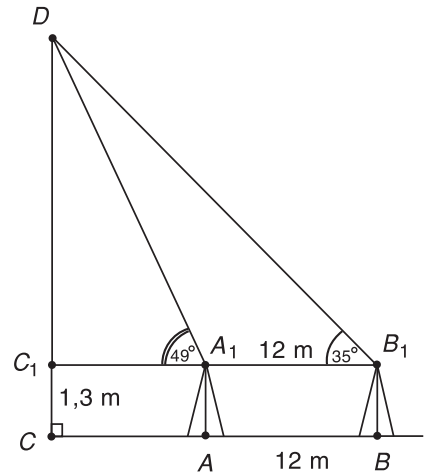
## Câu hỏi và bài tập

1. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $\widehat{B} = 58^\circ$  và cạnh  $a = 72 \text{ cm}$ . Tính  $\widehat{C}$ , cạnh  $b$ , cạnh  $c$  và đường cao  $h_a$ .
2. Cho tam giác  $ABC$  biết các cạnh  $a = 52,1 \text{ cm}$ ,  $b = 85 \text{ cm}$  và  $c = 54 \text{ cm}$ . Tính các góc  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  và  $\widehat{C}$ .
3. Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 120^\circ$ , cạnh  $b = 8 \text{ cm}$  và  $c = 5 \text{ cm}$ . Tính cạnh  $a$ , và các góc  $\widehat{B}$ ,  $\widehat{C}$  của tam giác đó.
4. Tính diện tích  $S$  của tam giác có số đo các cạnh lần lượt là 7, 9 và 12.
5. Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 120^\circ$ . Tính cạnh  $BC$  cho biết cạnh  $AC = m$  và  $AB = n$ .
6. Tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a = 8 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$  và  $c = 13 \text{ cm}$ .
  - a) Tam giác đó có góc tù không ?
  - b) Tính độ dài trung tuyến  $MA$  của tam giác  $ABC$  đó.
7. Tính góc lớn nhất của tam giác  $ABC$  biết
  - a) Các cạnh  $a = 3 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$  và  $c = 6 \text{ cm}$ ;
  - b) Các cạnh  $a = 40 \text{ cm}$ ,  $b = 13 \text{ cm}$  và  $c = 37 \text{ cm}$ .
8. Cho tam giác  $ABC$  biết cạnh  $a = 137,5 \text{ cm}$ ,  $\widehat{B} = 83^\circ$  và  $\widehat{C} = 57^\circ$ . Tính góc  $A$ , bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp, cạnh  $b$  và  $c$  của tam giác.
9. Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $BD = m$  và  $AC = n$ . Chứng minh rằng  $m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$ .

10. Hai chiếc tàu thuỷ  $P$  và  $Q$  cách nhau 300 m. Từ  $P$  và  $Q$  thẳng hàng với chân  $A$  của tháp hải đăng  $AB$  ở trên bờ biển người ta nhìn chiều cao  $AB$  của tháp dưới các góc  $\widehat{BPA} = 35^\circ$  và  $\widehat{BQA} = 48^\circ$ . Tính chiều cao của tháp.
11. Muốn đo chiều cao của Tháp Chăm Por Klong Garai ở Ninh Thuận (h.2.23), người ta lấy hai điểm  $A$  và  $B$  trên mặt đất có khoảng cách  $AB = 12$  m cùng thẳng hàng với chân  $C$  của tháp để đặt hai giác kế (h.2.24). Chân của giác kế có chiều cao  $h = 1,3$  m. Gọi  $D$  là đỉnh tháp và hai điểm  $A_1, B_1$  cùng thẳng hàng với  $C_1$  thuộc chiều cao  $CD$  của tháp. Người ta đo được  $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ$  và  $\widehat{DB_1C_1} = 35^\circ$ . Tính chiều cao  $CD$  của tháp đó.



Hình 2.23



Hình 2.24



## Người ta đã đo khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trăng như thế nào ?

Loài người đã biết được khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trăng cách đây khoảng hai ngàn năm với một độ chính xác tuyệt vời là vào khoảng 384 000 km. Sau đó khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trăng đã được xác lập một cách chắc chắn vào năm 1751 do một nhà thiên văn người Pháp là Giô-dep La-lăng (*Joseph Lalande*, 1732-1807) và một nhà toán học người Pháp là Ni-cô-la La-cay (*Nicolas Lacaille*, 1713-1762). Hai ông đã phối hợp tổ chức đứng ở hai địa điểm rất xa nhau, một người ở Bec-lin gọi là điểm A, còn người kia ở Mũi Hảo Vọng (*Bonne-Espérance*) một mũi đất ở cực nam châu Phi, gọi là điểm B (h. 2.25). Gọi C là một điểm trên Mặt Trăng. Từ A và B người ta đo và tính được các góc A, B và cạnh AB của tam giác ABC.

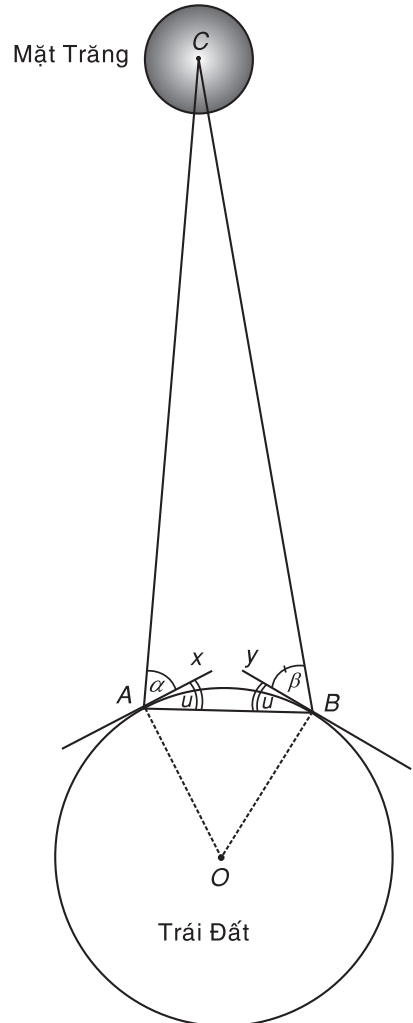
Trong mặt phẳng (ABC), gọi tia Ax là đường chân trời vẽ từ đỉnh A và tia By là đường chân trời vẽ từ đỉnh B. Kí hiệu  $\alpha = \widehat{CAx}$ ,  $\beta = \widehat{CBy}$ .

Gọi O là tâm Trái Đất, ta có :

$$u = \widehat{xAB} = \widehat{yBA} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}.$$

Tam giác ABC có  $\widehat{A} = \alpha + u$ ,  $\widehat{B} = \beta + u$ .

Vì biết độ dài cung  $\widehat{AB}$  nên ta tính được góc AOB và do đó tính được độ dài cạnh AB. Tam giác ABC được xác định vì biết "góc - cạnh - góc" của tam giác đó. Từ đó ta có thể tính được chiều cao CH của tam giác ABC là khoảng cách cần tìm. Người ta nhận thấy rằng khoảng cách này gần bằng mười lần độ dài xích đạo của Trái Đất ( $\approx 10 \times 40\,000$  km).



Hình 2.25

## ÔN TẬP CHƯƠNG II

### I. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Hãy nhắc lại định nghĩa giá trị lượng giác của một góc  $\alpha$  với  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Tại sao khi  $\alpha$  là các góc nhọn thì giá trị lượng giác này lại chính là các tỉ số lượng giác đã được học ở lớp 9 ?
2. Tại sao hai góc bù nhau lại có sin bằng nhau và cosin đối nhau ?
3. Nhắc lại định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Tích vô hướng này với  $|\vec{a}|$  và  $|\vec{b}|$  không đổi đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất khi nào ?
4. Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho vectơ  $\vec{a} = (-3 ; 1)$  và vectơ  $\vec{b} = (2 ; 2)$ , hãy tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .
5. Hãy nhắc lại định lí cosin trong tam giác. Từ các hệ thức này hãy tính  $\cos A$ ,  $\cos B$  và  $\cos C$  theo các cạnh của tam giác.
6. Từ hệ thức  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  trong tam giác, hãy suy ra định lí Py-ta-go.
7. Chứng minh rằng với mọi tam giác  $ABC$ , ta có  $a = 2R \sin A$ ,  $b = 2R \sin B$ ,  $c = 2R \sin C$ , trong đó  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.
8. Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng :
  - a) Góc  $A$  nhọn khi và chỉ khi  $a^2 < b^2 + c^2$  ;
  - b) Góc  $A$  tù khi và chỉ khi  $a^2 > b^2 + c^2$  ;
  - c) Góc  $A$  vuông khi và chỉ khi  $a^2 = b^2 + c^2$ .
9. Cho tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $BC = 6$ . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.
10. Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 12$ ,  $b = 16$ ,  $c = 20$ . Tính diện tích  $S$  của tam giác, chiều cao  $h_a$ , các bán kính  $R$ ,  $r$  của các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác và đường trung tuyến  $m_a$  của tam giác.
11. Trong tập hợp các tam giác có hai cạnh là  $a$  và  $b$ , tìm tam giác có diện tích lớn nhất.

## II. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào là đúng ?

(A)  $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  ;

(B)  $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ;

(C)  $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  ;

(D)  $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$  .

2. Cho  $\alpha$  và  $\beta$  là hai góc khác nhau và bù nhau. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai ?

(A)  $\sin \alpha = \sin \beta$  ;

(B)  $\cos \alpha = -\cos \beta$  ;

(C)  $\tan \alpha = -\tan \beta$  ;

(D)  $\cot \alpha = \cot \beta$  .

3. Cho  $\alpha$  là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng ?

(A)  $\sin \alpha < 0$  ;

(B)  $\cos \alpha > 0$  ;

(C)  $\tan \alpha < 0$  ;

(D)  $\cot \alpha > 0$  .

4. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai ?

(A)  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$  ;

(B)  $\cos 45^\circ = \sin 135^\circ$  ;

(C)  $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$  ;

(D)  $\sin 60^\circ = \cos 120^\circ$  .

5. Cho hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  trong đó  $\alpha < \beta$ . Khẳng định nào sau đây là sai ?

(A)  $\cos \alpha < \cos \beta$  ;

(B)  $\sin \alpha < \sin \beta$  ;

(C)  $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha = \sin \beta$  ;

(D)  $\tan \alpha + \tan \beta > 0$  .

6. Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  và có góc  $\widehat{B} = 30^\circ$ . Khẳng định nào sau đây là sai ?

(A)  $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ;

(B)  $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ;

(C)  $\cos C = \frac{1}{2}$  ;

(D)  $\sin B = \frac{1}{2}$  .

7. Tam giác đều  $ABC$  có đường cao  $AH$ . Khẳng định nào sau đây là đúng ?

(A)  $\sin \widehat{BAH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ;

(B)  $\cos \widehat{BAH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ;

(C)  $\sin \widehat{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ;

(D)  $\sin \widehat{AHC} = \frac{1}{2}$  .

8. Điều khẳng định nào sau đây là đúng ?

- (A)  $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$  ; (B)  $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$  ;  
(C)  $\tan \alpha = \tan(180^\circ - \alpha)$  ; (D)  $\cot \alpha = \cot(180^\circ - \alpha)$ .

9. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau đây :

- (A)  $\cos 35^\circ > \cos 10^\circ$  ; (B)  $\sin 60^\circ < \sin 80^\circ$  ;  
(C)  $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$  ; (D)  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ .

10. Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  và có góc  $\widehat{B} = 50^\circ$ . Hệ thức nào sau đây là sai ?

- (A)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$  ; (B)  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$  ;  
(C)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$  ; (D)  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$ .

11. Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Trong các kết quả sau đây, hãy chọn kết quả đúng.

- (A)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  ; (B)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  ;  
(C)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$  ; (D)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

12. Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $AB = AC = 30$  cm. Hai đường trung tuyến  $BF$  và  $CE$  cắt nhau tại  $G$ . Diện tích tam giác  $GFC$  là :

- (A)  $50 \text{ cm}^2$  ; (B)  $50\sqrt{2} \text{ cm}^2$  ;  
(C)  $75 \text{ cm}^2$  ; (D)  $15\sqrt{105} \text{ cm}^2$ .

13. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 5$  cm,  $BC = 13$  cm. Gọi góc  $\widehat{ABC} = \alpha$  và  $\widehat{ACB} = \beta$ . Hãy chọn kết luận đúng khi so sánh  $\alpha$  và  $\beta$  :

- (A)  $\beta > \alpha$  ; (B)  $\beta < \alpha$  ;  
(C)  $\beta = \alpha$  ; (D)  $\alpha \leq \beta$ .

14. Cho góc  $\widehat{xOy} = 30^\circ$ . Gọi  $A$  và  $B$  là hai điểm di động lần lượt trên  $Ox$  và  $Oy$  sao cho  $AB = 1$ . Độ dài lớn nhất của đoạn  $OB$  bằng :

- (A) 1,5 ; (B)  $\sqrt{3}$  ; (C)  $2\sqrt{2}$  ; (D) 2.

15. Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng ?  
 (A) Nếu  $b^2 + c^2 - a^2 > 0$  thì góc  $A$  nhọn ;  
 (B) Nếu  $b^2 + c^2 - a^2 > 0$  thì góc  $A$  tù ;  
 (C) Nếu  $b^2 + c^2 - a^2 < 0$  thì góc  $A$  nhọn ;  
 (D) Nếu  $b^2 + c^2 - a^2 < 0$  thì góc  $A$  vuông.
16. Đường tròn tâm  $O$  có bán kính  $R = 15$  cm. Gọi  $P$  là một điểm cách tâm  $O$  một khoảng  $PO = 9$  cm. Dây cung đi qua  $P$  và vuông góc với  $PO$  có độ dài là :  
 (A) 22 cm ;      (B) 23 cm ;      (C) 24 cm ;      (D) 25 cm.
17. Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 8$  cm,  $AC = 18$  cm và có diện tích bằng  $64$  cm<sup>2</sup>. Giá trị  $\sin A$  là :  
 (A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ;      (B)  $\frac{3}{8}$  ;      (C)  $\frac{4}{5}$  ;      (D)  $\frac{8}{9}$ .
18. Cho hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  phụ nhau. Hệ thức nào sau đây là sai ?  
 (A)  $\sin \alpha = -\cos \beta$  ;      (B)  $\cos \alpha = \sin \beta$  ;  
 (C)  $\tan \alpha = \cot \beta$  ;      (D)  $\cot \alpha = \tan \beta$ .
19. Bất đẳng thức nào dưới đây là đúng ?  
 (A)  $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$  ;      (B)  $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$  ;  
 (C)  $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$  ;      (D)  $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$ .
20. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Khẳng định nào sau đây là sai ?  
 (A)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$  ;      (B)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} < \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$  ;  
 (C)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} < \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  ;      (D)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} < \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}$ .
21. Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$  cm,  $BC = 7$  cm,  $CA = 9$  cm. Giá trị  $\cos A$  là :  
 (A)  $\frac{2}{3}$  ;      (B)  $\frac{1}{3}$  ;      (C)  $-\frac{2}{3}$  ;      (D)  $\frac{1}{2}$ .
22. Cho hai điểm  $A = (1 ; 2)$  và  $B = (3 ; 4)$ . Giá trị của  $\overrightarrow{AB}^2$  là :  
 (A) 4 ;      (B)  $4\sqrt{2}$  ;      (C)  $6\sqrt{2}$  ;      (D) 8.

23. Cho hai vectơ  $\vec{a} = (4 ; 3)$  và  $\vec{b} = (1 ; 7)$ . Góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là :
- (A)  $90^\circ$  ; (B)  $60^\circ$  ;  
 (C)  $45^\circ$  ; (D)  $30^\circ$ .
24. Cho hai điểm  $M = (1 ; -2)$  và  $N = (-3 ; 4)$ . Khoảng cách giữa hai điểm  $M$  và  $N$  là :
- (A) 4 ; (B) 6 ;  
 (C)  $3\sqrt{6}$  ; (D)  $2\sqrt{13}$ .
25. Tam giác  $ABC$  có  $A = (-1 ; 1)$  ;  $B = (1 ; 3)$  và  $C = (1 ; -1)$ .  
 Trong các cách phát biểu sau đây, hãy chọn cách phát biểu đúng.
- (A)  $ABC$  là tam giác có ba cạnh bằng nhau ;  
 (B)  $ABC$  là tam giác có ba góc đều nhọn ;  
 (C)  $ABC$  là tam giác cân tại  $B$  (có  $BA = BC$ ) ;  
 (D)  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ .
26. Cho tam giác  $ABC$  có  $A = (10 ; 5)$ ,  $B = (3 ; 2)$  và  $C = (6 ; -5)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng ?
- (A)  $ABC$  là tam giác đều ;  
 (B)  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$  ;  
 (C)  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$  ;  
 (D)  $ABC$  là tam giác có góc tù tại  $A$ .
27. Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$ .  
 Gọi  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ . Khi đó tỉ số  $\frac{R}{r}$  bằng :
- (A)  $1 + \sqrt{2}$  ; (B)  $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$  ;  
 (C)  $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$  ; (D)  $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ .
28. Tam giác  $ABC$  có  $AB = 9$  cm,  $AC = 12$  cm và  $BC = 15$  cm. Khi đó đường trung tuyến  $AM$  của tam giác có độ dài là :
- (A) 8 cm ; (B) 10 cm ;  
 (C) 9 cm ; (D) 7,5 cm.



29. Tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  và có diện tích  $S$ . Nếu tăng cạnh  $BC$  lên 2 lần đồng thời tăng cạnh  $CA$  lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc  $C$  thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng :
- (A)  $2S$ ;            (B)  $3S$ ;            (C)  $4S$ ;            (D)  $6S$ .
30. Cho tam giác  $DEF$  có  $DE = DF = 10$  cm và  $EF = 12$  cm. Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $EF$ . Đoạn thẳng  $DI$  có độ dài là :
- (A) 6,5 cm;        (B) 7 cm;            (C) 8 cm;            (D) 4 cm.

Bạn có biết



## Người tìm ra sao Hải Vương (Neptune) chỉ nhờ các phép tính về quỹ đạo các hành tinh

Nhà thiên văn học U-ban Lơ-ve-ri-ê (Urbain Leverrier, 1811-1877) sinh ra trong một gia đình công chức nhỏ tại vùng Noóc-măng-đi nước Pháp. Ông học ở trường Bách khoa và được giữ lại tiếp tục sự nghiệp nghiên cứu khoa học và giảng dạy ở đó. Ông đã say sưa thích thú tính toán chuyển động của các sao chổi và của các hành tinh, nhất là sao Thủy (Mercuré). Với những thành tích nghiên cứu khoa học xuất sắc về thiên văn học, ông được nhận danh hiệu Viện sĩ Hàn lâm Pháp khi ông tròn 34 tuổi.

Vào thời kì bấy giờ, các nhà thiên văn đang tranh luận sôi nổi về “điều bí mật”

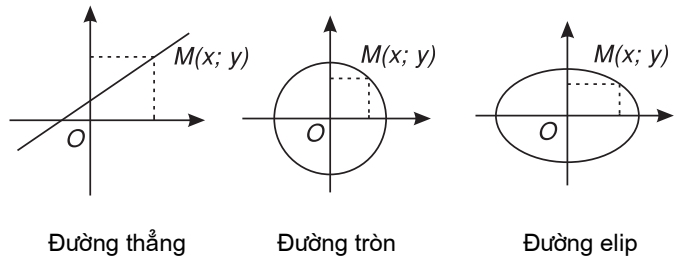


của sao Thiên Vương (*Uranus*) vì hành tinh này không phục tùng theo những định luật về chuyển động của các hành tinh do Giô-han Kê-ple (*Johannes Kepler*, 1571-1630) nêu ra và không theo đúng định luật vạn vật hấp dẫn của I-sắc Niu--ton (*Isaac Newton*, 1642-1727). Điều bí ẩn là vị trí của sao Thiên Vương trên bầu trời không bao giờ phù hợp với những tiên đoán dựa vào các phép tính của các nhà thiên văn thời bấy giờ. Nhà thiên văn học trẻ tuổi Lơ-ve-ri-ê muốn nghiên cứu tìm hiểu điều bí ẩn này và tự đặt câu hỏi tại sao sao Thiên Vương lại không tuân theo những quy luật chuyển động của các thiên thể. Một số nhà thiên văn thời bấy giờ đã dự đoán rằng con đường đi của sao Thiên Vương bị sức hút của sao Mộc (*Jupiter*) hay sao Thổ (*Saturne*) quấy nhiễu. Khi đó riêng Lơ-ve-ri-ê đã nêu lên một giả thuyết hết sức táo bạo, dựa vào các phép tính mà ông đã thực hiện. Ông cho rằng sao Thiên Vương không ngoan ngoãn theo tiên đoán của các nhà thiên văn có lẽ do bị ảnh hưởng bởi một hành tinh khác chưa được biết đến ở xa Mặt Trời hơn sao Thiên Vương. Hành tinh này đã tác động lên sao Thiên Vương làm cho nó có những nhiễu loạn khó có thể quan sát được. Lơ-ve-ri-ê đã kiên nhẫn tính toán làm việc trong phòng suốt hai tuần liền, với biết bao công thức, nhìn vào ai cũng cảm thấy chóng mặt. Cuối cùng chỉ dựa vào thuần túy các phép tính, Lơ-ve-ri-ê xác nhận rằng có sự hiện diện của một hành tinh chưa biết tên. Vào thời gian đó, ở Pháp vì đài Thiên văn Pa-ri không đủ mạnh, nên không thể nhìn được hành tinh đó. Ngay sau đó, Lơ-ve-ri-ê phải nhờ nhà thiên văn Gan (*Galle*) ở đài quan sát Bec-lin xem xét hộ. Ngày 23 tháng 9 năm 1846, Gan đã hướng kính thiên văn về khu vực bầu trời đã được Lơ-ve-ri-ê chỉ định và vui mừng tìm thấy một hành tinh chưa có tên trên danh mục. Như vậy sức mạnh của tài năng con người lại được thể hiện một cách xuất sắc qua việc khám phá ra hành tinh mới này. Mọi người đều tán phục, chúc mừng cuộc khám phá thành công tốt đẹp này và cho rằng Lơ-ve-ri-ê đã phát hiện ra một hành tinh mới chỉ nhờ vào đầu chiếc bút chì của mình (!). Đây là một bài toán rất khó, nó không giống bài toán tìm ngày, giờ, địa điểm xuất hiện nhật thực, nguyệt thực vì các chi tiết chỉ biết phỏng chừng thông qua các nhiễu loạn, do tác động của một vật chưa biết, người ta cần phải tìm quỹ đạo và khối lượng của hành tinh đó, cần xác định được khoảng cách của nó tới Mặt Trời và các hành tinh khác v.v... Hành tinh mới này được đặt tên là sao Hải Vương (*Neptune*). Cũng vào thời điểm đó nhà thiên văn học người Anh là A-đam (*Adam*) cũng phát hiện ra hành tinh đó và người này không biết đến công trình của người kia. Tuy vậy, Lơ-ve-ri-ê vẫn được xem là người đầu tiên phát hiện ra sao Hải Vương và sau đó ông được nhận học vị Giáo sư Đại học Xoóc-bon đồng thời được nhận Huy chương Bắc đẩu bội tinh. Năm 1853 U-banx Lơ-ve-ri-ê được Hoàng đế Na-pô-lê-ông (*Napoléon*) Đệ Tam phong chức Giám đốc Đài quan sát Pa-ri. Ông mất năm 1877. Các nhà thiên văn học trên thế giới đã đánh giá cao phát minh quan trọng này của Lơ-ve-ri-ê.

# PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

- ❖ Phương trình đường thẳng
- ❖ Phương trình đường tròn
- ❖ Phương trình đường elip


Trong chương này chúng ta sử dụng phương pháp toạ độ để tìm hiểu về đường thẳng, đường tròn và đường elip.



Hình 3.1

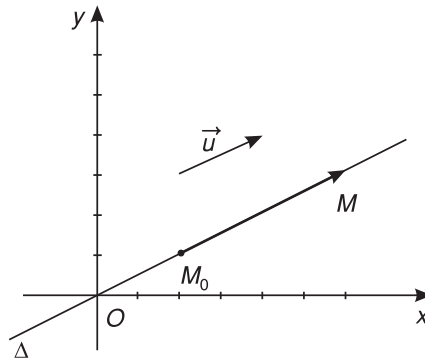
# §1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

## 1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

 Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng  $\Delta$  là đồ thị của hàm số  $y = \frac{1}{2}x$ .

a) Tìm tung độ của hai điểm  $M_0$  và  $M$  nằm trên  $\Delta$ , có hoành độ lần lượt là 2 và 6.

b) Cho vectơ  $\vec{u} = (2; 1)$ . Hãy chứng tỏ  $\overrightarrow{M_0M}$  cùng phương với  $\vec{u}$ .



Hình 3.2

### Định nghĩa

Vectơ  $\vec{u}$  được gọi là **vectơ chỉ phương** của đường thẳng  $\Delta$  nếu  $\vec{u} \neq \vec{0}$  và giá của  $\vec{u}$  song song hoặc trùng với  $\Delta$ .

### Nhận xét

– Nếu  $\vec{u}$  là một vectơ chỉ phương của đường thẳng  $\Delta$  thì  $k\vec{u}$  ( $k \neq 0$ ) cũng là một vectơ chỉ phương của  $\Delta$ . Do đó một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương.

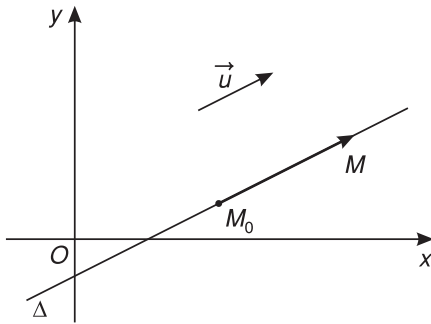
– Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

## 2. Phương trình tham số của đường thẳng

### a) Định nghĩa

Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0)$  và nhận  $\vec{u} = (u_1; u_2)$  làm vectơ chỉ phương. Với mỗi điểm  $M(x; y)$  bất kì trong mặt phẳng, ta có  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ . Khi đó

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \text{ cùng phương với } \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = tu_1 \\ y - y_0 = tu_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \quad (1)$$

Hình 3.3

Hệ phương trình (1) được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng  $\Delta$ , trong đó  $t$  là *tham số*.

Cho  $t$  một giá trị cụ thể thì ta xác định được một điểm trên đường thẳng  $\Delta$ .

- 2** Hãy tìm một điểm có tọa độ xác định và một vectơ chỉ phương của đường thẳng có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = 5 - 6t \\ y = 2 + 8t. \end{cases}$$

### b) Liên hệ giữa vectơ chỉ phương và hệ số góc của đường thẳng

Cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình tham số

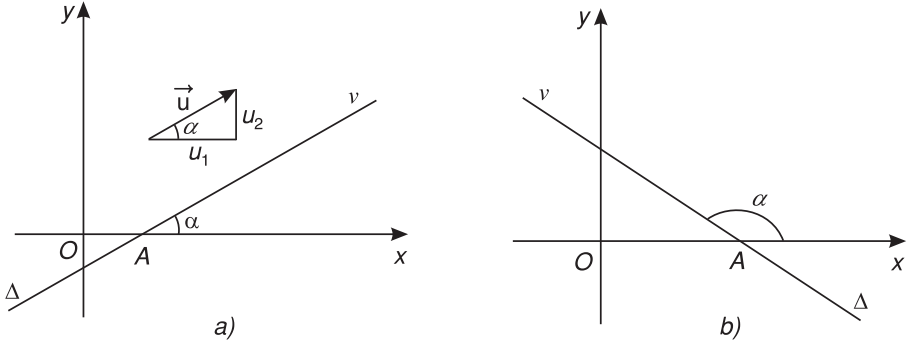
$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2. \end{cases}$$

Nếu  $u_1 \neq 0$  thì từ phương trình tham số của  $\Delta$  ta có

$$\begin{cases} t = \frac{x - x_0}{u_1} \\ y - y_0 = tu_2 \end{cases}$$

suy ra  $y - y_0 = \frac{u_2}{u_1}(x - x_0)$ .

Đặt  $k = \frac{u_2}{u_1}$  ta được  $y - y_0 = k(x - x_0)$ .



Hình 3.4

Gọi  $A$  là giao điểm của  $\Delta$  với trục hoành,  $Av$  là tia thuộc  $\Delta$  ở về nửa mặt phẳng toạ độ phía trên (chứa tia  $Oy$ ). Đặt  $\alpha = \widehat{xAv}$ , ta thấy  $k = \tan \alpha$ . Số  $k$  chính là *hệ số góc* của đường thẳng  $\Delta$  mà ta đã biết ở lớp 9.

Như vậy nếu đường thẳng  $\Delta$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (u_1 ; u_2)$  với  $u_1 \neq 0$  thì

$\Delta$  có hệ số góc  $k = \frac{u_2}{u_1}$ .

**3** Tính hệ số góc của đường thẳng  $d$  có vectơ chỉ phương là  $\vec{u} = (-1 ; \sqrt{3})$ .

**Vi dụ.** Viết phương trình tham số của đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm  $A(2 ; 3)$  và  $B(3 ; 1)$ . Tính hệ số góc của  $d$ .

*GIẢI*

Vì  $d$  đi qua  $A$  và  $B$  nên  $d$  có vectơ chỉ phương  $\overrightarrow{AB} = (1 ; -2)$

Phương trình tham số của  $d$  là  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t. \end{cases}$

Hệ số góc của  $d$  là  $k = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-2}{1} = -2$ .

### 3. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

4 Cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình  $\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$  và vectơ  $\vec{n} = (3; -2)$ . Hãy chứng tỏ  $\vec{n}$  vuông góc với vectơ chỉ phương của  $\Delta$ .

#### Định nghĩa

Vectơ  $\vec{n}$  được gọi là **vectơ pháp tuyến** của đường thẳng  $\Delta$  nếu  $\vec{n} \neq \vec{0}$  và  $\vec{n}$  vuông góc với vectơ chỉ phương của  $\Delta$ .

#### Nhận xét

– Nếu  $\vec{n}$  là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng  $\Delta$  thì  $k\vec{n}$  ( $k \neq 0$ ) cũng là một vectơ pháp tuyến của  $\Delta$ . Do đó một đường thẳng có vô số vectơ pháp tuyến.

– Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó.

### 4. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0)$  và nhận  $\vec{n}(a; b)$  làm vectơ pháp tuyến.

Với mỗi điểm  $M(x; y)$  bất kì thuộc mặt phẳng, ta có:  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ .

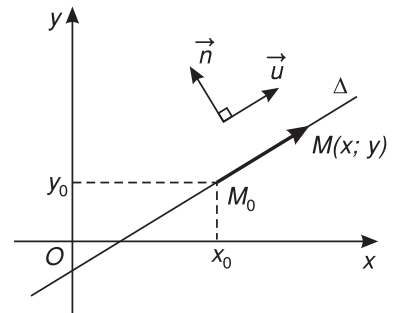
Khi đó:  $M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + c = 0$$

với  $c = -ax_0 - by_0$ .



Hình 3.5

**a) Định nghĩa**

Phương trình  $ax + by + c = 0$  với  $a$  và  $b$  không đồng thời bằng 0, được gọi là **phương trình tổng quát của đường thẳng**.

**Nhận xét.** Nếu đường thẳng  $\Delta$  có phương trình là  $ax + by + c = 0$  thì  $\Delta$  có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (a ; b)$  và có vectơ chỉ phương là  $\vec{u} = (-b ; a)$ .

**5** Hãy chứng minh nhận xét trên.

**b) Ví dụ.** Lập phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$  đi qua hai điểm  $A(2 ; 2)$  và  $B(4 ; 3)$ .

*GIẢI*

Đường thẳng  $\Delta$  đi qua hai điểm  $A, B$  nên có vectơ chỉ phương là  $\vec{AB} = (2 ; 1)$ .

Từ đó suy ra  $\Delta$  có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (-1 ; 2)$ . Vậy đường thẳng  $\Delta$  có phương trình tổng quát là :

$$(-1).(x - 2) + 2(y - 2) = 0$$

hay  $x - 2y + 2 = 0$ .

**6** Hãy tìm tọa độ của vectơ chỉ phương của đường thẳng có phương trình :

$$3x + 4y + 5 = 0.$$

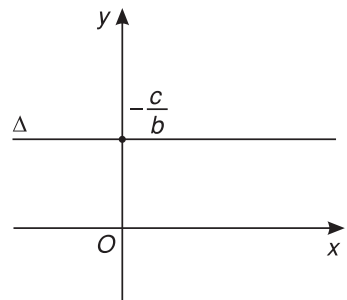
**c) Các trường hợp đặc biệt**

Cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình tổng quát  $ax + by + c = 0$  (1)

• Nếu  $a = 0$  phương trình (1) trở thành

$$by + c = 0 \text{ hay } y = -\frac{c}{b}.$$

Khi đó đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với trục  $Oy$  tại điểm  $\left( 0 ; -\frac{c}{b} \right)$  (h.3.6).



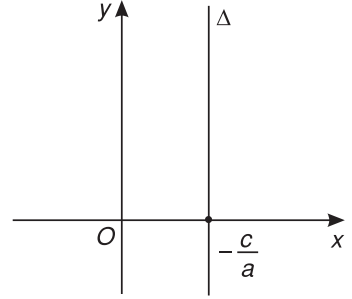
Hình 3.6



- Nếu  $b = 0$  phương trình (1) trở thành  $ax + c = 0$  hay  $x = -\frac{c}{a}$ .

Khi đó đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với trục  $Ox$

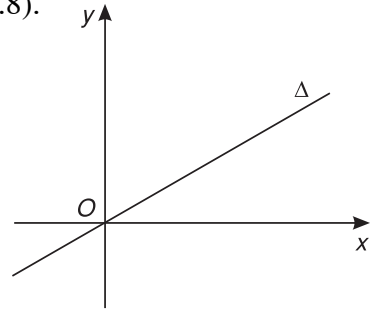
tại điểm  $\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$  (h.3.7).



Hình 3.7

- Nếu  $c = 0$  phương trình (1) trở thành  $ax + by = 0$ .

Khi đó đường thẳng  $\Delta$  đi qua gốc tọa độ  $O$  (h.3.8).

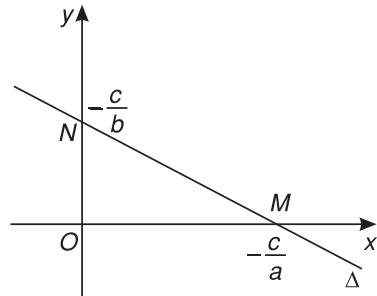


Hình 3.8

- Nếu  $a, b, c$  đều khác 0 ta có thể đưa phương trình (1) về dạng


$$\frac{x}{a_0} + \frac{y}{b_0} = 1 \quad (2)$$

với  $a_0 = -\frac{c}{a}, b_0 = -\frac{c}{b}$ .



Hình 3.9

Phương trình (2) được gọi là *phương trình đường thẳng theo đoạn chắn*, đường thẳng này cắt  $Ox$  và  $Oy$  lần lượt tại  $M(a_0; 0)$  và  $N(0; b_0)$  (h.3.9).

 7 Trong mặt phẳng Oxy, hãy vẽ các đường thẳng có phương trình sau đây :

$$d_1 : x - 2y = 0 ;$$

$$d_2 : x = 2 ;$$

$$d_3 : y + 1 = 0 ;$$

$$d_4 : \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1.$$

## 5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Xét hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  có phương trình tổng quát lần lượt là

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{và} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Toạ độ giao điểm của  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \quad (\text{I})$$

Ta có các trường hợp sau :

a) Hệ (I) có một nghiệm  $(x_0; y_0)$ , khi đó  $\Delta_1$  cắt  $\Delta_2$  tại điểm  $M_0(x_0; y_0)$ .

b) Hệ (I) có vô số nghiệm, khi đó  $\Delta_1$  trùng với  $\Delta_2$ .

c) Hệ (I) vô nghiệm, khi đó  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  không có điểm chung, hay  $\Delta_1$  song song với  $\Delta_2$ .



**Ví dụ.** Cho đường thẳng  $d$  có phương trình  $x - y + 1 = 0$ , xét vị trí tương đối của  $d$  với mỗi đường thẳng sau :

$$\Delta_1 : 2x + y - 4 = 0 ;$$

$$\Delta_2 : x - y - 1 = 0 ;$$

$$\Delta_3 : 2x - 2y + 2 = 0.$$

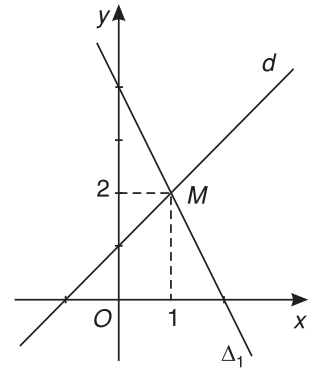
GIẢI

a) Xét  $d$  và  $\Delta_1$ , hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

có nghiệm  $(1; 2)$ .

Vậy  $d$  cắt  $\Delta_1$  tại  $M(1; 2)$  (h.3.10).

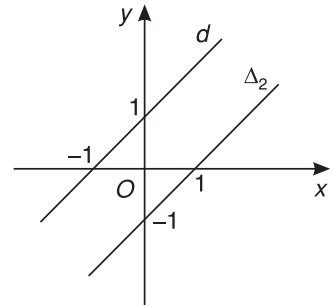


Hình 3.10

b) Xét  $d$  và  $\Delta_2$ , hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy  $d \parallel \Delta_2$  (h.3.11).



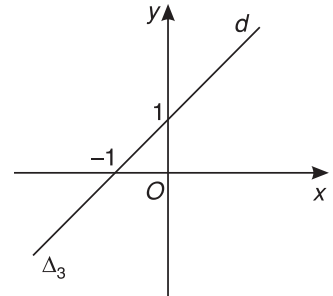
Hình 3.11

c) Xét  $d$  và  $\Delta_3$ , hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 & (1) \\ 2x - 2y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

có vô số nghiệm (vì các hệ số của (1) và (2) tỉ lệ).

Vậy  $d \equiv \Delta_3$  (h.3.12).



Hình 3.12

**8** Xét vị trí tương đối của đường thẳng  $\Delta: x - 2y + 1 = 0$  với mỗi đường thẳng sau :

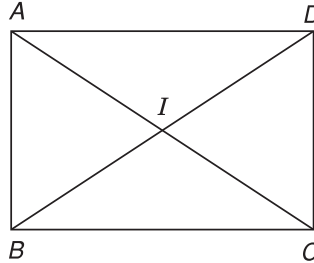
$$d_1: -3x + 6y - 3 = 0;$$

$$d_2: y = -2x;$$

$$d_3: 2x + 5 = 4y.$$

## 6. Góc giữa hai đường thẳng

9 Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $I$  và các cạnh  $AB = 1$ ,  $AD = \sqrt{3}$ . Tính số đo các góc  $\widehat{AID}$  và  $\widehat{DIC}$ .



Hình 3.13

Hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  cắt nhau tạo thành bốn góc. Nếu  $\Delta_1$  không vuông góc với  $\Delta_2$  thì góc nhọn trong số bốn góc đó được gọi là *góc giữa hai đường thẳng*  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ . Nếu  $\Delta_1$  vuông góc với  $\Delta_2$  thì ta nói góc giữa  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  bằng  $90^\circ$ . Trường hợp  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  song song hoặc trùng nhau thì ta quy ước góc giữa  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  bằng  $0^\circ$ . Như vậy góc giữa hai đường thẳng luôn bé hơn hoặc bằng  $90^\circ$ .

Góc giữa hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  được kí hiệu là  $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$  hoặc  $(\Delta_1, \Delta_2)$ .

Cho hai đường thẳng

$$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

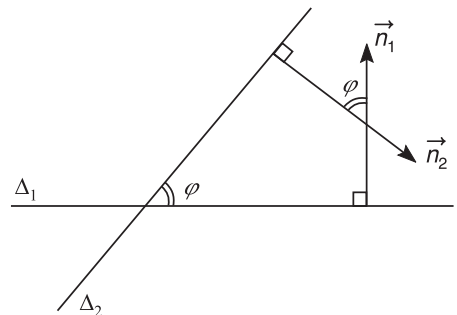
$$\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Đặt  $\varphi = (\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$  thì ta thấy  $\varphi$  bằng hoặc bù với góc giữa  $\vec{n}_1$  và  $\vec{n}_2$  trong đó  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  lần lượt là vectơ pháp tuyến của  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ . Vì  $\cos \varphi \geq 0$  nên ta suy ra

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}.$$

Vậy

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$



Hình 3.14

**Chú ý**

- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ .
- Nếu  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  có phương trình  $y = k_1 x + m_1$  và  $y = k_2 x + m_2$  thì

$$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1.$$

### 7. Công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

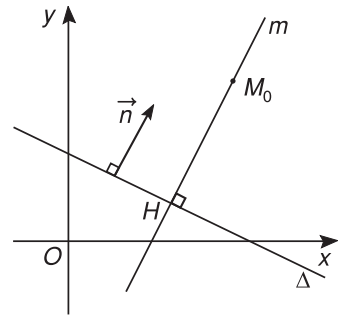
Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình  $ax + by + c = 0$  và điểm  $M_0(x_0; y_0)$ . **Khoảng cách** từ điểm  $M_0$  đến đường thẳng  $\Delta$ , kí hiệu là  $d(M_0, \Delta)$ , được tính bởi công thức

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**CHỨNG MINH**

Phương trình tham số của đường thẳng  $m$  đi qua  $M_0(x_0; y_0)$  và vuông góc với đường thẳng  $\Delta$  là :

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$$



Hình 3.15

trong đó  $\vec{n}(a; b)$  là vectơ pháp tuyến của  $\Delta$ .


Giao điểm  $H$  của đường thẳng  $m$  và  $\Delta$  ứng với giá trị của tham số là nghiệm  $t_H$  của phương trình :

$$a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c = 0.$$

Ta có 
$$t_H = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

Vậy điểm  $H = (x_0 + t_H a; y_0 + t_H b)$ .

$$\begin{aligned} \text{Từ đó suy ra } d(M_0, \Delta) = M_0H &= \sqrt{(x_H - x_0)^2 + (y_H - y_0)^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)t_H^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

-  10 Tính khoảng cách từ các điểm  $M(-2; 1)$  và  $O(0; 0)$  đến đường thẳng  $\Delta$  có phương trình  $3x - 2y - 1 = 0$ .

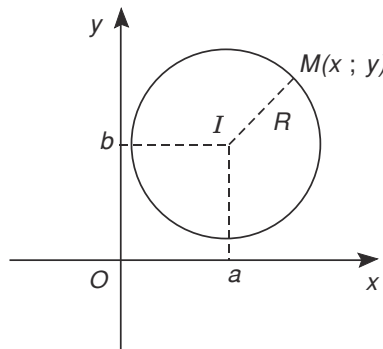
## Câu hỏi và bài tập

1. Lập phương trình tham số của đường thẳng  $d$  trong mỗi trường hợp sau :
  - a)  $d$  đi qua điểm  $M(2; 1)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (3; 4)$ ;
  - b)  $d$  đi qua điểm  $M(-2; 3)$  và có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (5; 1)$ .
2. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$  trong mỗi trường hợp sau :
  - a)  $\Delta$  đi qua  $M(-5; -8)$  và có hệ số góc  $k = -3$ ;
  - b)  $\Delta$  đi qua hai điểm  $A(2; 1)$  và  $B(-4; 5)$ .
3. Cho tam giác  $ABC$ , biết  $A(1; 4)$ ,  $B(3; -1)$  và  $C(6; 2)$ .
  - a) Lập phương trình tổng quát của các đường thẳng  $AB$ ,  $BC$  và  $CA$  ;
  - b) Lập phương trình tổng quát của đường cao  $AH$  và trung tuyến  $AM$ .
4. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm  $M(4; 0)$  và điểm  $N(0; -1)$ .
5. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  sau đây :
  - a)  $d_1: 4x - 10y + 1 = 0$                       và                       $d_2: x + y + 2 = 0$  ;
  - b)  $d_1: 12x - 6y + 10 = 0$                       và                       $d_2: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$  ;
  - c)  $d_1: 8x + 10y - 12 = 0$                       và                       $d_2: \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases}$ .
6. Cho đường thẳng  $d$  có phương trình tham số  $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$ .  
 Tìm điểm  $M$  thuộc  $d$  và cách điểm  $A(0; 1)$  một khoảng bằng 5.

7. Tìm số đo của góc giữa hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  lần lượt có phương trình  
 $d_1 : 4x - 2y + 6 = 0$  và  $d_2 : x - 3y + 1 = 0$ .
8. Tìm khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng trong các trường hợp sau :  
 a)  $A(3 ; 5)$ ,  $\Delta : 4x + 3y + 1 = 0$  ;  
 b)  $B(1 ; -2)$ ,  $d : 3x - 4y - 26 = 0$  ;  
 c)  $C(1 ; 2)$ ,  $m : 3x + 4y - 11 = 0$ .
9. Tìm bán kính của đường tròn tâm  $C(-2 ; -2)$  tiếp xúc với đường thẳng  
 $\Delta : 5x + 12y - 10 = 0$ .

## §2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

### 1. Phương trình đường tròn có tâm và bán kính cho trước



Hình 3.16

Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho đường tròn  $(C)$  tâm  $I(a ; b)$ , bán kính  $R$  (h.3.16).


Ta có

$$\begin{aligned}
 M(x ; y) \in (C) &\Leftrightarrow IM = R \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \\
 &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 .
 \end{aligned}$$


Phương trình  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  được gọi là *phương trình đường tròn tâm  $I(a; b)$  bán kính  $R$* .

Chẳng hạn, phương trình đường tròn tâm  $I(2; -3)$  bán kính  $R = 5$  là :

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

 **Chú ý.** Phương trình đường tròn có tâm là gốc tọa độ  $O$  và có bán kính  $R$  là :

$$x^2 + y^2 = R^2.$$


 1 Cho hai điểm  $A(3; -4)$  và  $B(-3; 4)$ .

Viết phương trình đường tròn  $(C)$  nhận  $AB$  làm đường kính.

## 2. Nhận xét

Phương trình đường tròn  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  có thể được viết dưới dạng  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ , trong đó  $c = a^2 + b^2 - R^2$ .

Ngược lại, phương trình  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  là *phương trình của đường tròn  $(C)$*  khi và chỉ khi  $a^2 + b^2 - c > 0$ . Khi đó đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(a; b)$  và bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .

 2 Hãy cho biết phương trình nào trong các phương trình sau đây là phương trình đường tròn :

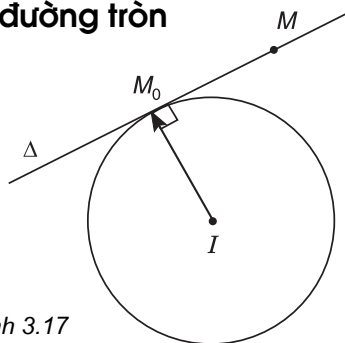
$$2x^2 + y^2 - 8x + 2y - 1 = 0;$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \quad ;$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 20 = 0;$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 = 0.$$

## 3. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn



Hình 3.17



Cho điểm  $M_0(x_0; y_0)$  nằm trên đường tròn  $(C)$  tâm  $I(a; b)$ . Gọi  $\Delta$  là tiếp tuyến với  $(C)$  tại  $M_0$ .

Ta có  $M_0$  thuộc  $\Delta$  và vectơ  $\overrightarrow{IM_0} = (x_0 - a; y_0 - b)$  là vectơ pháp tuyến của  $\Delta$ .

Do đó  $\Delta$  có phương trình là :

$$\boxed{(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0} \quad (2)$$

Phương trình (2) là *phương trình tiếp tuyến* của đường tròn  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  tại điểm  $M_0$  nằm trên đường tròn.



**Ví dụ.** Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm  $M(3; 4)$  thuộc đường tròn

$$(C) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8.$$

*GIẢI*

$(C)$  có tâm  $I(1; 2)$ , vậy phương trình tiếp tuyến với  $(C)$  tại  $M(3; 4)$  là :

$$(3 - 1)(x - 3) + (4 - 2)(y - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - 7 = 0.$$

## Câu hỏi và bài tập

1. Tìm tâm và bán kính của các đường tròn sau :

a)  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$  ;

b)  $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 11 = 0$  ;

c)  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ .

2. Lập phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  trong các trường hợp sau :

a)  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(-2; 3)$  và đi qua  $M(2; -3)$  ;

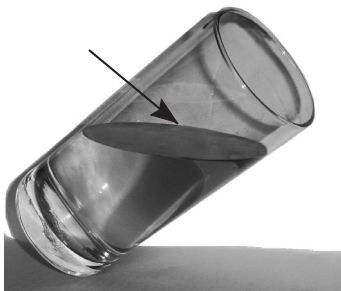
b)  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(-1; 2)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $x - 2y + 7 = 0$  ;

c)  $(\mathcal{C})$  có đường kính  $AB$  với  $A = (1; 1)$  và  $B = (7; 5)$ .

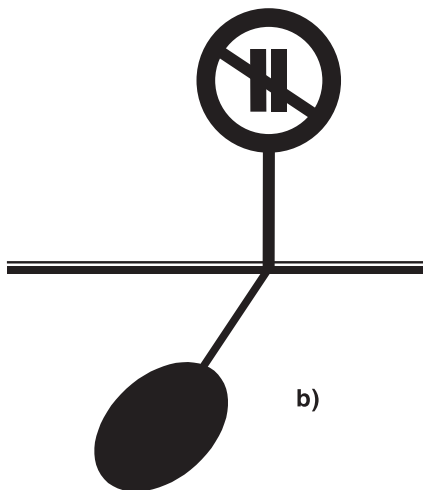
3. Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm
- a)  $A(1 ; 2)$ ,  $B(5 ; 2)$ ,  $C(1 ; -3)$  ;  
 b)  $M(-2 ; 4)$ ,  $N(5 ; 5)$ ,  $P(6 ; -2)$ .
4. Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với hai trục tọa độ  $Ox$ ,  $Oy$  và đi qua điểm  $M(2 ; 1)$ .
5. Lập phương trình của đường tròn tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm ở trên đường thẳng  $4x - 2y - 8 = 0$ .
6. Cho đường tròn ( $\mathcal{C}$ ) có phương trình
- $$x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0.$$
- a) Tìm tọa độ tâm và bán kính của ( $\mathcal{C}$ ) ;  
 b) Viết phương trình tiếp tuyến với ( $\mathcal{C}$ ) đi qua điểm  $A(-1 ; 0)$  ;  
 c) Viết phương trình tiếp tuyến với ( $\mathcal{C}$ ) vuông góc với đường thẳng  $3x - 4y + 5 = 0$ .

### §3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

#### 1. Định nghĩa đường elip



a)



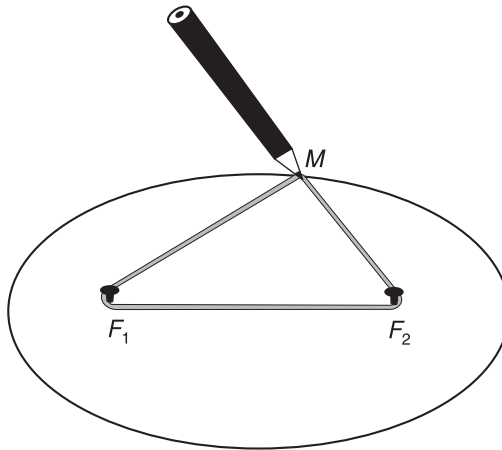
b)

Hình 3.18

1 Quan sát mặt nước trong cốc nước cắm nghiêng (h.3.18a). Hãy cho biết đường được đánh dấu bởi mũi tên có phải là đường tròn hay không ?

2 Hãy cho biết bóng của một đường tròn trên một mặt phẳng (h.3.18b) có phải là một đường tròn hay không ?

Đóng hai chiếc đinh cố định tại hai điểm  $F_1$  và  $F_2$  (h.3.19). Lấy một vòng dây kín không đàn hồi có độ dài lớn hơn  $2F_1F_2$ . Quàng vòng dây đó qua hai chiếc đinh và kéo căng tại một điểm  $M$  nào đó. Đặt đầu bút chì tại điểm  $M$  rồi di chuyển sao cho dây luôn căng. Đầu bút chì vạch nên một đường mà ta gọi là đường elip.



Hình 3.19

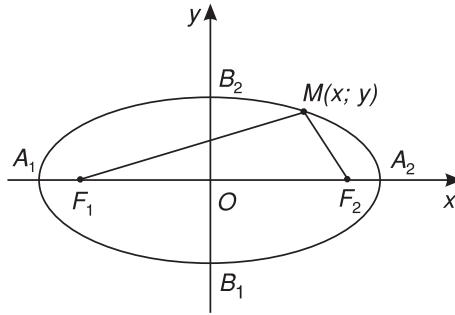
### Định nghĩa

Cho hai điểm cố định  $F_1$ ,  $F_2$  và một độ dài không đổi  $2a$  lớn hơn  $F_1F_2$ . **Elip** là tập hợp các điểm  $M$  trong mặt phẳng sao cho

$$F_1M + F_2M = 2a.$$

Các điểm  $F_1$  và  $F_2$  gọi là các **tiêu điểm** của elip. Độ dài  $F_1F_2 = 2c$  gọi là **tiêu cự** của elip.

## 2. Phương trình chính tắc của elip



Hình 3.20

Cho elip  $(E)$  có các tiêu điểm  $F_1$  và  $F_2$ . Điểm  $M$  thuộc elip khi và chỉ khi  $F_1M + F_2M = 2a$ . Chọn hệ trục tọa độ  $Oxy$  sao cho  $F_1 = (-c; 0)$  và  $F_2 = (c; 0)$ . Khi đó người ta chứng minh được :

$$M(x; y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

trong đó  $b^2 = a^2 - c^2$ .

Phương trình (1) gọi là *phương trình chính tắc* của elip.

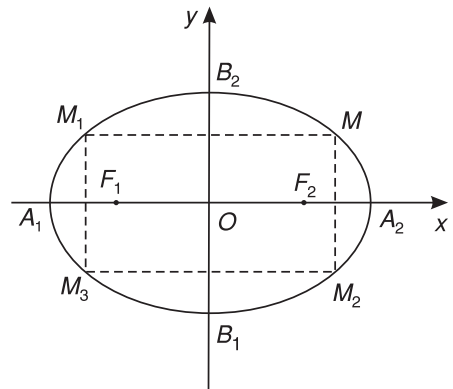
**3** Trong phương trình (1) hãy giải thích vì sao ta luôn đặt được  $b^2 = a^2 - c^2$ .

## 3. Hình dạng của elip

Xét elip  $(E)$  có phương trình (1) :

a) Nếu điểm  $M(x; y)$  thuộc  $(E)$  thì các điểm  $M_1(-x; y)$ ,  $M_2(x; -y)$  và  $M_3(-x; -y)$  cũng thuộc  $(E)$  (h.3.21).

Vậy  $(E)$  có các trục đối xứng là  $Ox$ ,  $Oy$  và có tâm đối xứng là gốc  $O$ .



Hình 3.21

**b)** Thay  $y = 0$  vào (1) ta có  $x = \pm a$ , suy ra  $(E)$  cắt  $Ox$  tại hai điểm  $A_1(-a; 0)$  và  $A_2(a; 0)$ . Tương tự thay  $x = 0$  vào (1) ta được  $y = \pm b$ , vậy  $(E)$  cắt  $Oy$  tại hai điểm  $B_1(0; -b)$  và  $B_2(0; b)$ .

Các điểm  $A_1, A_2, B_1$  và  $B_2$  gọi là *các đỉnh* của elip.

Đoạn thẳng  $A_1A_2$  gọi là *trục lớn*, đoạn thẳng  $B_1B_2$  gọi là *trục nhỏ* của elip.



**Ví dụ.** Elip  $(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$  có các đỉnh là  $A_1(-3; 0), A_2(3; 0), B_1(0; -1), B_2(0; 1)$  và  $A_1A_2 = 6$  là trục lớn còn  $B_1B_2 = 2$  là trục nhỏ.



Hãy xác định tọa độ các tiêu điểm và vẽ hình elip trong ví dụ trên.

#### 4. Liên hệ giữa đường tròn và đường elip

**a)** Từ hệ thức  $b^2 = a^2 - c^2$  ta thấy nếu tiêu cự của elip càng nhỏ thì  $b$  càng gần bằng  $a$ , tức là trục nhỏ của elip càng gần bằng trục lớn. Lúc đó elip có dạng gần như đường tròn.

**b)** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho đường tròn  $(\mathcal{C})$  có phương trình

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

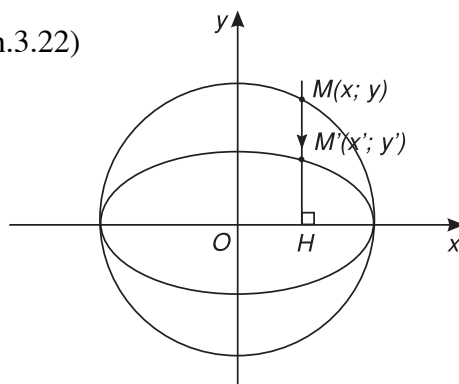
Với mỗi điểm  $M(x; y)$  thuộc đường tròn ta xét điểm  $M'(x'; y')$  sao cho

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{b}{a}y \end{cases} \quad (\text{với } 0 < b < a) \quad (\text{h.3.22})$$

thì tập hợp các điểm  $M'$  có tọa độ thoả mãn phương trình

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \text{ là một elip } (E).$$

Khi đó ta nói đường tròn  $(\mathcal{C})$  được co thành elip  $(E)$ .



Hình 3.22

## Câu hỏi và bài tập

1. Xác định độ dài các trục, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh của các elip có phương trình sau :

a)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  ;

b)  $4x^2 + 9y^2 = 1$  ;

c)  $4x^2 + 9y^2 = 36$ .

2. Lập phương trình chính tắc của elip, biết

a) Độ dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 8 và 6 ;

b) Độ dài trục lớn bằng 10 và tiêu cự bằng 6.

3. Lập phương trình chính tắc của elip trong các trường hợp sau :

a) Elip đi qua các điểm  $M(0 ; 3)$  và  $N\left(3 ; -\frac{12}{5}\right)$  ;

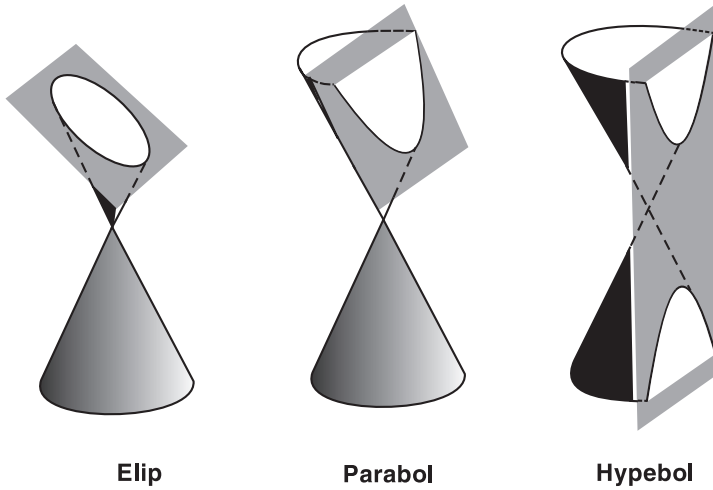
b) Elip có một tiêu điểm là  $F_1(-\sqrt{3} ; 0)$  và điểm  $M\left(1 ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  nằm trên elip.

4. Để cắt một bảng hiệu quảng cáo hình elip có trục lớn là 80 cm và trục nhỏ là 40 cm từ một tấm ván ép hình chữ nhật có kích thước 80 cm  $\times$  40 cm, người ta vẽ hình elip đó lên tấm ván ép như hình 3.19. Hỏi phải ghim hai cái đinh cách các mép tấm ván ép bao nhiêu và lấy vòng dây có độ dài là bao nhiêu ?

5. Cho hai đường tròn  $\mathcal{C}_1(F_1 ; R_1)$  và  $\mathcal{C}_2(F_2 ; R_2)$ .  $\mathcal{C}_1$  nằm trong  $\mathcal{C}_2$  và  $F_1 \neq F_2$ . Đường tròn  $\mathcal{C}$  thay đổi luôn tiếp xúc ngoài với  $\mathcal{C}_1$  và tiếp xúc trong với  $\mathcal{C}_2$ . Hãy chứng tỏ rằng tâm  $M$  của đường tròn  $\mathcal{C}$  di động trên một elip.



## Ba đường conic và quỹ đạo của tàu vũ trụ



Hình 3.23

1. Khi cắt một mặt nón tròn xoay bởi một mặt phẳng không đi qua đỉnh và không vuông góc với trục của mặt nón, người ta nhận thấy ngoài đường elip ra, có thể còn hai loại đường khác nữa là parabol và hypebol (h.3.23). Các đường nói trên thường được gọi là *ba đường conic* (do gốc tiếng Hi Lạp Konos nghĩa là mặt nón).
2. Dưới đây là vài ví dụ về hình ảnh của ba đường conic trong đời sống hằng ngày :
  - Bóng của một quả bóng đá trên mặt sân thường có hình elip (h.3.24).



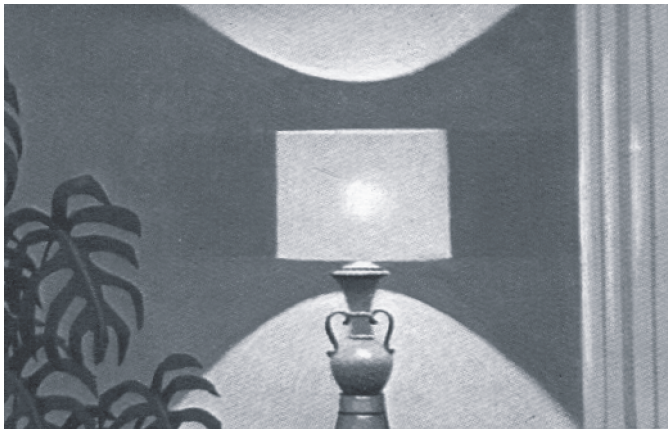
Hình 3.24

– Tia nước từ vòi phun ở công viên thường là đường parabol (h.3.25).



*Hình 3.25*

– Bóng của đèn ngủ in trên tường có thể là đường hypebol (h.3.26).



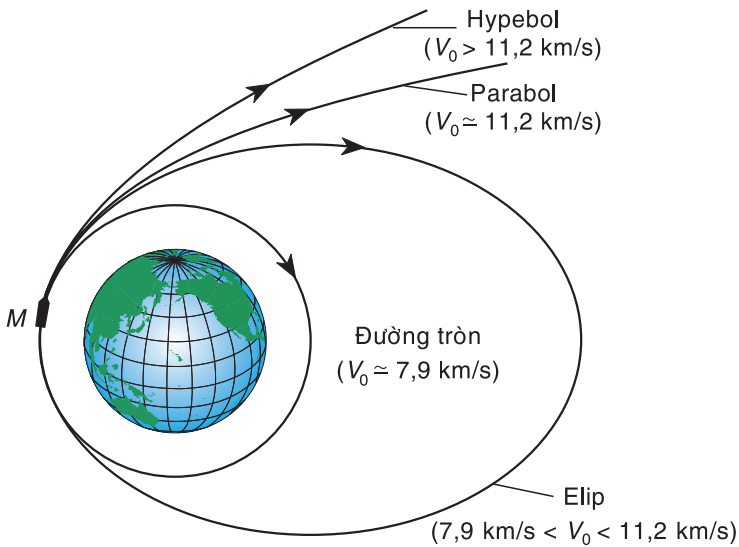
*Hình 3.26*

**3.** Tàu vũ trụ được phóng lên từ Trái Đất luôn bay theo những quỹ đạo, quỹ đạo này thường là đường tròn, elip, parabol hoặc hypebol. Hình dạng của quỹ đạo phụ thuộc vào vận tốc của tàu vũ trụ (h.3.27). Ta có bảng tương ứng giữa tốc độ và quỹ đạo như sau.



Tốc độ $V_0$ của tàu vũ trụ	Hình dạng quỹ đạo tàu vũ trụ
7,9 km/s	đường tròn
$7,9 \text{ km/s} < V_0 < 11,2 \text{ km/s}$	elip
11,2 km/s	Một phần của parabol
$V_0 > 11,2 \text{ km/s}$	Một phần của hypebol

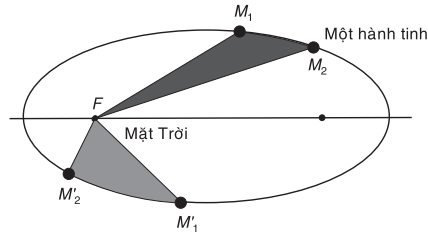
Ngoài ra người ta còn tính được các tốc độ vũ trụ tổng quát, nghĩa là tốc độ của các thiên thể chuyển động đối với các thiên thể khác dưới tác dụng của lực hấp dẫn tương hỗ. Ví dụ để phóng một tàu vũ trụ thoát li được Mặt Trăng trở về Trái Đất thì cần tạo cho tàu một tốc độ ban đầu là 2,38 km/s.



Hình 3.27



## Giô-han Kê-ple và quy luật chuyển động của các hành tinh



Hình 3.28

Giô-han Kê-ple (*Johannes Kepler*, 1571 - 1630) là nhà thiên văn người Đức. Ông là một trong những người đã đặt nền móng cho khoa học tự nhiên. Kê-ple sinh ra ở Vu-tem-be (*Wurtemberg*) trong một gia đình nghèo, 15 tuổi theo học trường dòng. Năm 1593 ông tốt nghiệp Học viện Thiên văn và Toán học vào loại xuất sắc và trở thành giáo sư trung học. Năm 1600 ông đến Pra-ha và cùng làm việc với nhà thiên văn nổi tiếng Ti-cô Bra.

Kê-ple nổi tiếng nhờ phát minh ra các định luật chuyển động của các hành tinh:

1. Các hành tinh chuyển động quanh Mặt Trời theo các quỹ đạo là các đường elip mà Mặt Trời là một tiêu điểm.
2. Đoạn thẳng nối từ Mặt Trời đến hành tinh quét được những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau. Chẳng hạn nếu xem Mặt Trời là tiêu điểm  $F$  và nếu trong cùng một khoảng thời gian  $t$ , một hành tinh di chuyển từ  $M_1$  đến  $M_2$  hoặc từ  $M'_1$  đến  $M'_2$  thì diện tích hai hình  $FM_1M_2$  và  $FM'_1M'_2$  bằng nhau (h.3.28).
3. Nếu gọi  $T_1, T_2$  lần lượt là thời gian để hai hành tinh bất kì bay hết một vòng quanh Mặt Trời và gọi  $a_1, a_2$  lần lượt là độ dài nửa trục lớn của elip quỹ đạo của hai hành tinh trên thì ta luôn có

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}.$$

Các định luật nói trên ngày nay trong thiên văn gọi là ba định luật Kê-ple.

## ÔN TẬP CHƯƠNG III

### I. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Biết các đỉnh  $A(5 ; 1)$ ,  $C(0 ; 6)$  và phương trình  $CD : x + 2y - 12 = 0$ . Tìm phương trình các đường thẳng chứa các cạnh còn lại.
2. Cho  $A(1 ; 2)$ ,  $B(-3 ; 1)$  và  $C(4 ; -2)$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  sao cho  $MA^2 + MB^2 = MC^2$ .
3. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng  
 $\Delta_1 : 5x + 3y - 3 = 0$  và  $\Delta_2 : 5x + 3y + 7 = 0$ .
4. Cho đường thẳng  $\Delta : x - y + 2 = 0$  và hai điểm  $O(0 ; 0)$ ,  $A(2 ; 0)$ .
  - a) Tìm điểm đối xứng của  $O$  qua  $\Delta$  ;
  - b) Tìm điểm  $M$  trên  $\Delta$  sao cho độ dài đường gấp khúc  $OMA$  ngắn nhất.
5. Cho ba điểm  $A(4 ; 3)$ ,  $B(2 ; 7)$  và  $C(-3 ; -8)$ .
  - a) Tìm toạ độ của trọng tâm  $G$  và trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$  ;
  - b) Gọi  $T$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Chứng minh  $T$ ,  $G$  và  $H$  thẳng hàng ;
  - c) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .
6. Lập phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng  $3x - 4y + 12 = 0$  và  $12x + 5y - 7 = 0$ .
7. Cho đường tròn ( $\mathcal{C}$ ) có tâm  $I(1 ; 2)$  và bán kính bằng 3. Chứng minh rằng tập hợp các điểm  $M$  mà từ đó ta vẽ được hai tiếp tuyến với ( $\mathcal{C}$ ) tạo với nhau một góc  $60^\circ$  là một đường tròn. Hãy viết phương trình đường tròn đó.
8. Tìm góc giữa hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  trong các trường hợp sau :
  - a)  $\Delta_1 : 2x + y - 4 = 0$  và  $\Delta_2 : 5x - 2y + 3 = 0$  ;
  - b)  $\Delta_1 : y = -2x + 4$  và  $\Delta_2 : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ .
9. Cho elip ( $E$ ) :  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ .  
Tìm toạ độ các đỉnh, các tiêu điểm và vẽ elip đó.

10. Ta biết rằng Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo một quỹ đạo là một elip mà Trái Đất là một tiêu điểm. Elip đó có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 769 266 km và 768 106 km. Tính khoảng cách ngắn nhất và khoảng cách dài nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng, biết rằng các khoảng cách đó đạt được khi Trái Đất và Mặt Trăng nằm trên trục lớn của elip.

## II. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho tam giác  $ABC$  có tọa độ các đỉnh là  $A(1 ; 2)$ ,  $B(3 ; 1)$  và  $C(5 ; 4)$ . Phương trình nào sau đây là phương trình đường cao của tam giác vẽ từ  $A$  ?
- (A)  $2x + 3y - 8 = 0$  ; (B)  $3x - 2y - 5 = 0$  ;  
 (C)  $5x - 6y + 7 = 0$  ; (D)  $3x - 2y + 5 = 0$ .
2. Cho tam giác  $ABC$  với các đỉnh là  $A(-1 ; 1)$ ,  $B(4 ; 7)$  và  $C(3 ; -2)$ ,  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Phương trình tham số của trung tuyến  $CM$  là :
- (A)  $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$  ; (B)  $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \end{cases}$  ;  
 (C)  $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$  ; (D)  $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$ .
3. Cho phương trình tham số của đường thẳng  $d$  :  $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -9 - 2t \end{cases}$ .
- Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình tổng quát của  $(d)$  ?
- (A)  $2x + y - 1 = 0$  ; (B)  $2x + 3y + 1 = 0$  ;  
 (C)  $x + 2y + 2 = 0$  ; (D)  $x + 2y - 2 = 0$ .
4. Đường thẳng đi qua điểm  $M(1; 0)$  và song song với đường thẳng  $d : 4x + 2y + 1 = 0$  có phương trình tổng quát là :
- (A)  $4x + 2y + 3 = 0$  ; (B)  $2x + y + 4 = 0$  ;  
 (C)  $2x + y - 2 = 0$  ; (D)  $x - 2y + 3 = 0$ .
5. Cho đường thẳng  $d$  có phương trình tổng quát :  $3x + 5y + 2006 = 0$ . Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau :
- (A)  $(d)$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (3 ; 5)$  ;  
 (B)  $(d)$  có vectơ chỉ phương  $\vec{a} = (5 ; -3)$  ;  
 (C)  $(d)$  có hệ số góc  $k = \frac{5}{3}$  ;  
 (D)  $(d)$  song song với đường thẳng  $3x + 5y = 0$ .

6. Bán kính của đường tròn tâm  $I(0; -2)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta : 3x - 4y - 23 = 0$  là :
- (A) 15 ;            (B) 5 ;            (C)  $\frac{3}{5}$  ;            (D) 3.
7. Cho hai đường thẳng  $d_1 : 2x + y + 4 - m = 0$  và  $d_2 : (m + 3)x + y - 2m - 1 = 0$ .  
 $d_1$  song song với  $d_2$  khi :
- (A)  $m = 1$  ;            (B)  $m = -1$  ;            (C)  $m = 2$  ;            (D)  $m = 3$ .
8. Cho  $(d_1) : x + 2y + 4 = 0$  và  $(d_2) : 2x - y + 6 = 0$ . Số đo của góc giữa hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  là :
- (A)  $30^\circ$  ;            (B)  $60^\circ$  ;            (C)  $45^\circ$  ;            (D)  $90^\circ$ .
9. Cho hai đường thẳng  $\Delta_1 : x + y + 5 = 0$  và  $\Delta_2 : y = -10$ . Góc giữa  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  là :
- (A)  $45^\circ$  ;            (B)  $30^\circ$  ;            (C)  $88^\circ 57' 52''$  ;            (D)  $1^\circ 13' 8''$ .
10. Khoảng cách từ điểm  $M(0; 3)$  đến đường thẳng  $\Delta : x \cos \alpha + y \sin \alpha + 3(2 - \sin \alpha) = 0$  là :
- (A)  $\sqrt{6}$  ;            (B) 6 ;            (C)  $3 \sin \alpha$  ;            (D)  $\frac{3}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ .
11. Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn ?
- (A)  $x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 1 = 0$  ;            (B)  $4x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$  ;  
 (C)  $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 20 = 0$  ;            (D)  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ .
12. Cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$ .  
 Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau :
- (A)  $(C)$  có tâm  $I(1; 2)$  ;            (B)  $(C)$  có bán kính  $R = 5$  ;  
 (C)  $(C)$  đi qua điểm  $M(2; 2)$  ;            (D)  $(C)$  không đi qua điểm  $A(1; 1)$ .
13. Phương trình tiếp tuyến tại điểm  $M(3; 4)$  với đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$  là :
- (A)  $x + y - 7 = 0$  ;            (B)  $x + y + 7 = 0$  ;  
 (C)  $x - y - 7 = 0$  ;            (D)  $x + y - 3 = 0$ .

14. Cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$  và đường thẳng  $\Delta : x + 2y + 1 = 0$ .  
 Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :
- (A)  $\Delta$  đi qua tâm của  $(C)$  ; (B)  $\Delta$  cắt  $(C)$  tại hai điểm ;  
 (C)  $\Delta$  tiếp xúc với  $(C)$  ; (D)  $\Delta$  không có điểm chung với  $(C)$ .
15. Đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$  có tâm  $I$  và bán kính  $R$  là :
- (A)  $I(-1 ; 1), R = 1$  ; (B)  $I\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right), R = \frac{\sqrt{6}}{2}$  ;  
 (C)  $I\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right), R = \frac{\sqrt{6}}{2}$  ; (D)  $I(1 ; -1), R = \sqrt{6}$  .
16. Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình sau đây là phương trình của đường tròn  $x^2 + y^2 - 2(m + 2)x + 4my + 19m - 6 = 0$  ?
- (A)  $1 < m < 2$  ; (B)  $-2 \leq m \leq 1$  ;  
 (C)  $m < 1$  hoặc  $m > 2$  ; (D)  $m < -2$  hoặc  $m > 1$ .
17. Đường thẳng  $\Delta : 4x + 3y + m = 0$  tiếp xúc với đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 = 1$  khi :
- (A)  $m = 3$  ; (B)  $m = 5$  ; (C)  $m = 1$  ; (D)  $m = 0$ .
18. Cho hai điểm  $A(1 ; 1)$  và  $B(7 ; 5)$ . Phương trình đường tròn đường kính  $AB$  là :
- (A)  $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 12 = 0$  ; (B)  $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$  ;  
 (C)  $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 12 = 0$  ; (D)  $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 12 = 0$ .
19. Đường tròn đi qua ba điểm  $A(0 ; 2), B(-2 ; 0)$  và  $C(2 ; 0)$  có phương trình là :
- (A)  $x^2 + y^2 = 8$  ; (B)  $x^2 + y^2 + 2x + 4 = 0$  ;  
 (C)  $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$  ; (D)  $x^2 + y^2 - 4 = 0$ .
20. Cho điểm  $M(0 ; 4)$  và đường tròn  $(C)$  có phương trình  $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ .  
 Tìm phát biểu đúng trong các phát biểu sau :
- (A)  $M$  nằm ngoài  $(C)$  ; (B)  $M$  nằm trên  $(C)$  ;  
 (C)  $M$  nằm trong  $(C)$  ; (D)  $M$  trùng với tâm của  $(C)$ .
21. Cho elip  $(E) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  và cho các mệnh đề :
- (I)  $(E)$  có các tiêu điểm  $F_1(-4 ; 0)$  và  $F_2(4 ; 0)$  ;  
 (II)  $(E)$  có tỉ số  $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$  ;

(III)  $(E)$  có đỉnh  $A_1(-5; 0)$ ;

(IV)  $(E)$  có độ dài trục nhỏ bằng 3.

Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau :

(A) (I) và (II) ;

(B) (II) và (III) ;

(C) (I) và (III) ;

(D) (IV) và (I).

22. Phương trình chính tắc của elip có hai đỉnh là  $(-3; 0)$ ,  $(3; 0)$  và hai tiêu điểm là  $(-1; 0)$ ,  $(1; 0)$  là :

(A)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$  ;

(B)  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$  ;

(C)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$  ;

(D)  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

23. Cho elip  $(E) : x^2 + 4y^2 = 1$  và cho các mệnh đề :

(I)  $(E)$  có trục lớn bằng 1 ;

(II)  $(E)$  có trục nhỏ bằng 4 ;

(III)  $(E)$  có tiêu điểm  $F_1\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  ;

(IV)  $(E)$  có tiêu cự bằng  $\sqrt{3}$ .

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

(A) (I) ;

(B) (II) và (IV) ;

(C) (I) và (III) ;

(D) (IV).

24. Dây cung của elip  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $0 < b < a$ ) vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm có độ dài là :

(A)  $\frac{2c^2}{a}$  ;

(B)  $\frac{2b^2}{a}$  ;

(C)  $\frac{2a^2}{c}$  ;

(D)  $\frac{a^2}{c}$ .

25. Một elip có trục lớn bằng 26, tỉ số  $\frac{c}{a} = \frac{12}{13}$ . Trục nhỏ của elip bằng bao nhiêu ?

(A) 5 ;

(B) 10 ;

(C) 12 ;

(D) 24.

26. Cho elip  $(E) : 4x^2 + 9y^2 = 36$ . Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau :

(A)  $(E)$  có trục lớn bằng 6 ;

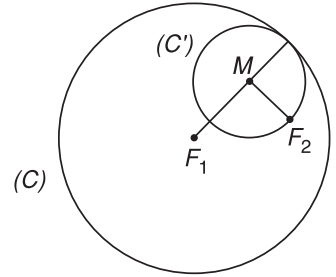
(B)  $(E)$  có trục nhỏ bằng 4 ;

(C)  $(E)$  có tiêu cự bằng  $\sqrt{5}$  ;

(D)  $(E)$  có tỉ số  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

27. Cho đường tròn  $(C)$  tâm  $F_1$  bán kính  $2a$  và một điểm  $F_2$  ở bên trong của  $(C)$ .

Tập hợp tâm  $M$  của các đường tròn  $(C')$  thay đổi nhưng luôn đi qua  $F_2$  và tiếp xúc với  $(C)$  (h.3.29) là đường nào sau đây ?



Hình 3.29

- (A) Đường thẳng ; (B) Đường tròn ;  
(C) Elip ; (D) Parabol.

28. Khi cho  $t$  thay đổi, điểm  $M (5\cos t ; 4\sin t)$  di động trên đường nào sau đây ?

- (A) Elip ; (B) Đường thẳng ;  
(C) Parabol ; (D) Đường tròn.

29. Cho elip  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $0 < b < a$ ). Gọi  $F_1, F_2$  là hai tiêu điểm và cho điểm

$M(0 ; -b)$ . Giá trị nào sau đây bằng giá trị của biểu thức  $MF_1 \cdot MF_2 - OM^2$  ?

- (A)  $c^2$  ; (B)  $2a^2$  ; (C)  $2b^2$  ; (D)  $a^2 - b^2$ .

30. Cho elip  $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  và đường thẳng  $\Delta : y + 3 = 0$ .

Tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm của  $(E)$  đến đường thẳng  $\Delta$  bằng giá trị nào sau đây :

- (A) 16 ; (B) 9 ; (C) 81 ; (D) 7.

## ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ . Với giá trị nào của  $m$  thì hai vectơ  $\vec{a} + m\vec{b}$  và  $\vec{a} - m\vec{b}$  vuông góc với nhau ?

2. Cho tam giác  $ABC$  và hai điểm  $M, N$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AN} = \beta \overrightarrow{AC}$ .

a) Hãy vẽ  $M, N$  khi  $\alpha = \frac{2}{3} ; \beta = -\frac{2}{3}$ .

b) Hãy tìm mối liên hệ giữa  $\alpha$  và  $\beta$  để  $MN$  song song với  $BC$ .



3. Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ .
- Cho  $M$  là một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Tính  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  theo  $a$ ;
  - Cho đường thẳng  $d$  tùy ý, tìm điểm  $N$  trên đường thẳng  $d$  sao cho  $NA^2 + NB^2 + NC^2$  nhỏ nhất.
4. Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng 6 cm. Một điểm  $M$  nằm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = 2$  cm.
- Tính độ dài của đoạn thẳng  $AM$  và tính cosin của góc  $\widehat{BAM}$ ;
  - Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABM$ ;
  - Tính độ dài đường trung tuyến vẽ từ đỉnh  $C$  của tam giác  $ACM$ ;
  - Tính diện tích tam giác  $ABM$ .
5. Chứng minh rằng trong mọi tam giác  $ABC$  ta đều có
- $a = b \cos C + c \cos B$ ;
  - $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$ ;
  - $h_a = 2R \sin B \sin C$ .
6. Cho các điểm  $A(2 ; 3)$ ,  $B(9 ; 4)$ ,  $M(5 ; y)$  và  $P(x ; 2)$ .
- Tìm  $y$  để tam giác  $AMB$  vuông tại  $M$ ;
  - Tìm  $x$  để ba điểm  $A$ ,  $P$  và  $B$  thẳng hàng.
7. Cho tam giác  $ABC$  với  $H$  là trực tâm. Biết phương trình của đường thẳng  $AB$ ,  $BH$  và  $AH$  lần lượt là  $4x + y - 12 = 0$ ,  $5x - 4y - 15 = 0$  và  $2x + 2y - 9 = 0$ .  
Hãy viết phương trình hai đường thẳng chứa hai cạnh còn lại và đường cao thứ ba.
8. Lập phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng  $\Delta : 4x + 3y - 2 = 0$  và tiếp xúc với hai đường thẳng  
 $d_1 : x + y + 4 = 0$  và  $d_2 : 7x - y + 4 = 0$ .
9. Cho elip  $(E)$  có phương trình :  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ .
- Hãy xác định tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm của elip  $(E)$  và vẽ elip đó ;
  - Qua tiêu điểm của elip dựng đường thẳng song song với  $Oy$  và cắt elip tại hai điểm  $M$  và  $N$ . Tính độ dài đoạn  $MN$ .

# HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

## CHƯƠNG I

### §1.

- a) Đúng; b) Đúng.
- a) Các vector cùng phương:  $\vec{a}, \vec{b}; \vec{u}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y}, \vec{w}$  và  $\vec{z}$ .  
b) Các vector cùng hướng:  $\vec{a}, \vec{b}; \vec{x}, \vec{y}$  và  $\vec{z}$ .  
c) Các vector ngược hướng:  $\vec{u}, \vec{v}; \vec{w}, \vec{x}; \vec{w}, \vec{y}; \vec{w}, \vec{z}$ .  
d) Các vector bằng nhau:  $\vec{x}, \vec{y}$ .
- a) Các vector cùng phương với  $\vec{OA}: \vec{DA}, \vec{AD}, \vec{BC}, \vec{CB}, \vec{AO}, \vec{OD}, \vec{DO}, \vec{FE}, \vec{EF}$ .  
b) Các vector bằng  $\vec{AB}: \vec{OC}, \vec{ED}, \vec{FO}$ .

### §2.

- $|\vec{AB} + \vec{BC}| = a, |\vec{AB} - \vec{BC}| = a\sqrt{3}$ .
- a) Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng;  
b) Nếu giá của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc.
- $\vec{a}, \vec{b}$  có cùng độ dài và ngược hướng.
- $\vec{F}_3$  có cường độ là  $100\sqrt{3}$  N, ngược hướng với  $\vec{ME}$ , trong đó E là đỉnh của hình bình hành MAEB.

### §3.

- $\vec{AB} = \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v}); \vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{4}{3}\vec{v};$   
 $\vec{CA} = -\frac{4}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}.$
- $\vec{AM} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}.$
- K là điểm thuộc đoạn AB mà  $\frac{KA}{KB} = \frac{2}{3}$ .
- M là trung điểm của trung tuyến CC'.

### §4.

- $\vec{AB} = 3, \vec{MN} = -5; \vec{AB}$  và  $\vec{MN}$  ngược hướng.

- a) đúng b) đúng c) sai d) đúng.

- $\vec{a} = (2; 0), \vec{b} = (0; -3),$   
 $\vec{c} = (3; -4), \vec{d} = (0, 2; \sqrt{3}).$
- a), b), c) đều đúng, d) sai.
- $A(x_0; -y_0); B(-x_0; y_0);$   
 $C(-x_0; -y_0).$
- $D(0; -5)$
- $A(8; 1), B(-4; -5), C(-4; 7).$
- $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}.$

## ÔN TẬP CHƯƠNG I

- Các vector cần tìm:  $\vec{OC}, \vec{FO}, \vec{ED}.$
- Các khẳng định đúng: a), b) và d).
- ABCD là hình thoi.
- M, N, P lần lượt là các điểm đối xứng với C, A, B qua tâm O.
- a)  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a\sqrt{3};$  b)  $|\vec{AB} - \vec{AC}| = a.$
- a)  $m = \frac{1}{2}, n = 0;$  b)  $m = -1, n = \frac{1}{2};$   
c)  $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2};$  d)  $m = -\frac{1}{2}, n = 1.$
- Các khẳng định đúng a) và c).
- a)  $\vec{u} = (40; -13);$  b)  $\vec{x} = (8; -7);$   
c)  $k = -2, h = -1.$
- $m = \frac{2}{5}.$
- Khẳng định đúng là c).

## CHƯƠNG II

### §1.

- $AK = a \sin 2\alpha; OK = a \cos 2\alpha.$
- $P = \frac{25}{9}.$
- $\cos(\vec{AC}, \vec{BA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \sin(\vec{AC}, \vec{BD}) = 1;$   
 $\cos(\vec{AB}, \vec{CD}) = -1.$

§2.

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  ;  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -a^2$ .
- a) Khi điểm  $O$  nằm ngoài đoạn  $AB$  ta có  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a.b$ .  
b) Khi điểm  $O$  nằm giữa hai điểm  $A$  và  $B$  ta có  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -a.b$ .
- b)  $4R^2$ .
- a)  $D\left(\frac{5}{3}; 0\right)$ ;      b)  $\sqrt{10}(2 + \sqrt{2})$ ;  
c) 5.
- a)  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  ;      b)  $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$  ;  
c)  $(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$ .
- Toạ độ điểm  $C$  cần tìm là :  $C(1 ; 2)$  và  $C'(-1 ; 2)$ .

§3.

- $\widehat{C} = 32^\circ$  ;  $b \approx 61,06$  cm ;  
 $c \approx 38,15$  cm ;  $h_a \approx 32,36$  cm.
- $\widehat{A} \approx 36^\circ$  ;  $\widehat{B} \approx 106^\circ 28'$  ;  $\widehat{C} = 37^\circ 32'$ .
- $a = 11,36$  cm ;  $\widehat{B} \approx 37^\circ 48'$  ;  $\widehat{C} = 22^\circ 12'$ .
- $S = 31,3$  đvdt.
- $BC = \sqrt{m^2 + n^2 + mn}$ .
- a)  $\widehat{C} = 91^\circ 47'$  ;      b)  $m_a = 10,89$  cm.
- a) Góc lớn nhất là  $\widehat{C} \approx 117^\circ 16'$  ;  
b) Góc lớn nhất là  $\widehat{A} \approx 93^\circ 41'$ .
- $\widehat{A} = 40^\circ$  ;  $b = 212,31$  cm ;  $c = 179,40$  cm
- 568,457 m.
- 22,772 m.

**ÔN TẬP CHƯƠNG II**

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$ .
- $R = 2\sqrt{3}$ .
- $S = 96$  ;  $h_a = 16$  ;  $R = 10$  ;  $r = 4$  ;  
 $m_a \approx 17,09$ .
- Diện tích  $S$  của tam giác lớn nhất khi  $\widehat{C} = 90^\circ$ .

**CHƯƠNG III**

§1.

- a)  $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$  ;      b)  $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$ .
- a)  $3x + y + 23 = 0$  ;      b)  $2x + 3y - 7 = 0$ .
- a)  $AB : 5x + 2y - 13 = 0$  ;  
 $BC : x - y - 4 = 0$  ;  
 $CA : 2x + 5y - 22 = 0$ .  
b)  $AH : x + y - 5 = 0$  ;  $AM : x + y - 5 = 0$ .
- $x - 4y - 4 = 0$ .
- a)  $d_1$  cắt  $d_2$  ;      b)  $d_1 // d_2$  ;      c)  $d_1 \equiv d_2$ .
- $M_1(4 ; 4)$ ,  $M_2\left(-\frac{24}{5} ; \frac{-2}{5}\right)$ .
- $45^\circ$ .
- a)  $\frac{28}{5}$  ;      b) 3 ;      c) 0.
- $\frac{44}{13}$ .

§2.

- a)  $I(1 ; 1)$ ,  $R = 2$  ;      b)  $I\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{4}\right)$ ,  $R = 1$  ;  
c)  $I(2 ; -3)$ ,  $R = 4$ .
- a)  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 52$  ;  
b)  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{5}$  ;  
c)  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13$ .
- a)  $x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0$  ;  
b)  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ .
- $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$  ;  
 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ .
- $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$  ;  
 $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ .
- a)  $I(2 ; -4)$ ,  $R = 5$  ;  
b)  $3x - 4y + 3 = 0$  ;  
c)  $4x + 3y + 29 = 0$ ,  $4x + 3y - 21 = 0$ .

§3.

1. a)  $2a = 10, 2b = 6$ ;  
 $F_1(-4; 0), F_2(4; 0)$ ;  
 $A_1(-5; 0), A_2(5; 0)$ ;  
 $B_1(0; -3), B_2(0; 3)$ .  
 b)  $2a = 1, 2b = \frac{2}{3}$ ;  
 $F_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}; 0\right), F_2\left(\frac{\sqrt{5}}{6}; 0\right)$ ;  
 $A_1\left(-\frac{1}{2}; 0\right), A_2\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ ;  
 $B_1\left(0; -\frac{1}{3}\right), B_2\left(0; \frac{1}{3}\right)$ .  
 c)  $2a = 6, 2b = 4$ ;  
 $F_1(-\sqrt{5}; 0), F_2(\sqrt{5}; 0)$ ;  
 $A_1(-3; 0), A_2(3; 0)$ ;  
 $B_1(0; -2), B_2(0; 2)$ .
2. a)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ;      b)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .
3. a)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ;      b)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ .
4.  $40 - 20\sqrt{3} \approx 5,36$  cm;  
 $80 + 40\sqrt{3} \approx 149,28$  cm.
5.  $MF_1 + MF_2 = R_1 + R_2$ .

**ÔN TẬP CHƯƠNG III**

1.  $AB: x + 2y - 7 = 0$ ;  $AD: 2x - y - 9 = 0$ ;  
 $BC: 2x - y + 6 = 0$ .
2.  $(x+6)^2 + (y-5)^2 = 66$ .
3.  $5x + 3y + 2 = 0$ .
4. a)  $O'(-2; 2)$ ;      b)  $M\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ .
5. a)  $G\left(1; \frac{2}{3}\right), H(13; 0), T(-5; 1)$ ;  
 b)  $\overrightarrow{TH} = 3\overrightarrow{TG}$ ;  
 c)  $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 85$ .

6.  $21x + 77y - 191 = 0$ ;  
 $99x - 27y + 121 = 0$ .
7.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 36$ .
8. a)  $\cos(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = \frac{8}{\sqrt{145}}$ ,  
 $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) \approx 48^\circ 21' 59''$ ;  
 b)  $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = 90^\circ$ .
9.  $A_1(-4; 0), A_2(4; 0)$ ;  
 $B_1(0; -3), B_2(0; 3)$ ;  
 $F_1(-\sqrt{7}; 0), F_2(\sqrt{7}; 0)$ .
10. 363 517 km; 405 749 km.

**ÔN TẬP CUỐI NĂM**

1.  $m = \pm \frac{3}{5}$ .
2. b)  $\alpha = \beta$ .
3. a)  $2a^2$ ;  
 b)  $N$  là hình chiếu vuông góc của trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  lên  $d$ .
4. a)  $AM = \sqrt{28}$  cm,  $\cos \widehat{BAM} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$ ;  
 b)  $R = \frac{2\sqrt{21}}{3}$  cm;      c)  $\sqrt{19}$  cm;  
 d)  $3\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.
6. a)  $y = 0, y = 7$ ;      b)  $x = -5$ .
7.  $AC: 4x + 5y - 20 = 0$ ;  
 $BC: x - y - 3 = 0$ ;  
 $CH: 3x - 12y - 1 = 0$ .
8.  $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$ ;  
 $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 18$ .
9. a)  $A_1(-10; 0), A_2(10; 0)$ ;  
 $B_1(0; -6), B_2(0; 6)$ ;  
 $F_1(-8; 0), F_2(8; 0)$ ;  
 b)  $\frac{36}{5}$ .

## BẢNG THUẬT NGỮ

<b>B</b>		<b>P</b>	
Bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt	37	Phân tích (biểu thị) một vectơ theo hai vectơ không cùng phương	15
Biểu thức tọa độ của tích vô hướng	43	Phương trình chính tắc của elip	86
Bình phương vô hướng của một vectơ	41	Phương trình đường tròn	81
<b>C</b>		Phương trình tiếp tuyến của đường tròn	83
Công thức Hê-rông	53	Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn	75
<b>D</b>		Phương trình tổng quát của đường thẳng	74
Diện tích tam giác	53	Phương trình tham số của đường thẳng	71
<b>Đ</b>		<b>Q</b>	
Độ dài đại số	21	Quy tắc ba điểm	11
Điều kiện để ba điểm thẳng hàng	15	Quy tắc hình bình hành	9
Điều kiện để hai vectơ cùng phương	15	<b>T</b>	
Đỉnh của elip	87	Tâm đối xứng của elip	86
Định lí côsin	48	Tiêu cự của elip	85
Định lí sin	51	Tiêu điểm của elip	85
Độ dài của vectơ	6	Tích của vectơ với một số	14
Đường conic	89	Tính chất của phép cộng các vectơ	9
<b>E</b>		Tích vô hướng của hai vectơ	41
Elip (đường elip)	85	Tọa độ của một điểm	23
<b>G</b>		Tọa độ của vectơ	22
Góc giữa hai vectơ	38	Tọa độ của trọng tâm tam giác	25
Góc giữa hai đường thẳng	78	Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng	25
Gốc tọa độ	21	Tổng của hai vectơ	8
Giải tam giác	55	Trục nhỏ của elip	87
Giá của vectơ	5	Trục đối xứng của elip	86
Giá trị lượng giác của một góc	36	Trục hoành	21
<b>H</b>		Trục lớn của elip	87
Hệ trục tọa độ	21	Trục tọa độ	20
Hệ số góc của đường thẳng	72	Trục tung	21
Hiệu của hai vectơ	10	Tung độ	23
Hệ thức lượng trong tam giác	46	<b>V</b>	
Hoành độ	23	Vectơ	4
<b>K</b>		Vectơ đơn vị	6
Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng	79	Vectơ bằng nhau	6
Khoảng cách giữa hai điểm	45	Vectơ cùng hướng	5
<b>M</b>		Vectơ cùng phương	5
Mặt phẳng tọa độ	22	Vectơ chỉ phương của đường thẳng	70
<b>N</b>		Vectơ đối	10
Nửa đường tròn đơn vị	35	Vectơ - không	6
		Vectơ ngược hướng	5
		Vectơ pháp tuyến của đường thẳng	73
		Vị trí tương đối của hai đường thẳng	76

# MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
<b>Chương I. VECTƠ</b>	3
§1. Các định nghĩa	4
Câu hỏi và bài tập	7
§2. Tổng và hiệu của hai vectơ	8
Câu hỏi và bài tập	12
§3. Tích của vectơ với một số	14
Câu hỏi và bài tập	17
§4. Hệ trục toạ độ	20
Câu hỏi và bài tập	26
<b><i>Ôn tập chương I</i></b>	27
I. Câu hỏi và bài tập	27
II. Câu hỏi trắc nghiệm	28
<b>Chương II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG</b>	34
§1. Giá trị lượng giác của một góc bất kì từ $0^\circ$ đến $180^\circ$	35
Câu hỏi và bài tập	40
§2. Tích vô hướng của hai vectơ	41
Câu hỏi và bài tập	45
§3. Các hệ thức lượng trong tam giác và giải tam giác	46
Câu hỏi và bài tập	59
<b><i>Ôn tập chương II</i></b>	62
I. Câu hỏi và bài tập	62
II. Câu hỏi trắc nghiệm	63
<b>Chương III. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG</b>	69
§1. Phương trình đường thẳng	70
Câu hỏi và bài tập	80
§2. Phương trình đường tròn	81
Câu hỏi và bài tập	83
§3. Phương trình đường elip	84
Câu hỏi và bài tập	88
<b><i>Ôn tập chương III</i></b>	93
I. Câu hỏi và bài tập	93
II. Câu hỏi trắc nghiệm	94
<b><i>Ôn tập cuối năm</i></b>	98
Hướng dẫn và đáp số	100
Bảng thuật ngữ	103

*Chịu trách nhiệm xuất bản* : Chủ tịch Hội đồng Thành viên **NGUYỄN ĐỨC THÁI**

Tổng Giám đốc **HOÀNG LÊ BÁCH**

*Chịu trách nhiệm nội dung* : Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**

*Biên tập lần đầu* : **NGUYỄN HOÀNG NGUYỄN - HOÀNG NGỌC PHƯƠNG**

*Biên tập tái bản* : **TRẦN THANH HÀ**

*Thiết kế sách* : **BÙI NGỌC LAN**

*Trình bày bìa* : **HÀ TUỆ HƯƠNG**

*Sửa bản in* : **PHÒNG SỬA BẢN IN (NXBGD TẠI TP.HCM)**

*Chế bản* : **PHÒNG CHẾ BẢN (NXBGD TẠI TP.HCM)**

---

## HÌNH HỌC 10